Символами t, θ обозначаются независимые переменные (по умолчанию – скалярные), символами x, y, z — векторы состояния (вообще, разных размерностей), а символами u, v, w — векторы управления (тоже, возможно, разных размерностей). Запись $T = \mathrm{fix}$ означает, что момент времени T задан, запись $T \neq \mathrm{fix}$ — что он не задан, а подлежит определению из условия оптимума. При решении описанных ниже задач должны быть сделаны необходимые (т.е. нужные для применения теоремы о необходимых условиях оптимальности) предположения о свойствах функций, входящих в задачу. Таким образом, свойства этих функций – составная часть ответа.

1

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \ (0 \leq t \leq T), \quad T = \mathrm{fix},$$
$$J_{q+1} \leq 0, \ldots, J_{q+s} \leq 0, \quad J_{q+s+1} = \ldots = J_{q+s+k} = 0, \quad \max_{1 \leq i \leq q} J_i \to \min$$
$$\text{где} \quad J_i = P_i\left(x(0), x(T), \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt\right).$$

2

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \ (0 \leq t \leq T), \quad T \neq \mathrm{fix},$$
$$J_1 \leq 0, \ldots, J_s \leq 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$
$$J_i := P_i\left(T, x(0), x(t_i), x(T), \int_{t_i}^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt\right),$$
$$0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{s+k} \leq T, \quad t_i = \mathrm{fix}.$$

3

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), y(t), u(t)), \quad \dot{y}(t) \in \Omega_y \subset \mathbb{R}^l, \quad u(t) \in \Omega_u \subset \mathbb{R}^m \ (0 \leq t \leq T), \quad T \neq \mathrm{fix}$$
$$J_1 \leq 0, \ldots, J_s \leq 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$
$$J_i := \gamma_i\left[T, x(0), x(T), \int_0^T \varphi_i[t, x(t), y(t), \dot{y}(t), u(t)]\, dt\right].$$

4

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t), y(t), u(t)), \dot{y}(t) - f_2(t, y(t), u(t)) \in \Omega_y \subset \mathbb{R}^l, \quad u(t) \in \Omega_u \subset \mathbb{R}^m \ (0 \leq t \leq T), \quad T \neq \mathrm{fix},$$

$$J_{q+1} \leq 0, \ldots, J_{q+s} \leq 0, \quad J_{q+s+1} = \ldots = J_{q+s+k} = 0, \quad \max_{1 \leq i \leq q} J_i \to \min$$
$$J_i := \int_0^T \varphi_i[T, t, x(t), y(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[T, x(0), x(T), y(0), y(T)].$$

5

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \ (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$
$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$\text{где} \quad J_i = P_i\left(x(t_1), \ldots, x(t_N), \int_0^T \phi_i(t, x(t), u(t)\, dt\right),$$
$$0 < t_1 < \ldots < t_N < T, \quad t_i \ne \text{fix,N=fix}.$$

6

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \ (0 \le t \le T), \quad T \ne \text{fix},$$
$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$\text{где} \quad J_i = \gamma_i(T, x(0), x(T)) + \int_0^T \phi_i\left(t, x(t), u(t), \int_{T-t}^T \xi_i(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau\right) dt$$

7

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t))$$
$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, v(t) \in \Omega' \subset \mathbb{R}^{m'}, v(t+h) = v(t), \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$\text{где} \quad J_i = \gamma_i(x(0), x(T)) + \int_0^T \phi_i(t, x(t), u(t), v(t))\, dt$$

(управление $v(t)$ является периодической функцией заданного периода h).

8

$$\dot{x}(t) = \int_0^t f(t, \theta, x(\theta), u(\theta)), u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \ (0 \le t \le T), \quad T \ne \text{fix},$$
$$J_{q+1} \le 0, \ldots, J_{q+s} \le 0, \quad J_{q+s+1} = \ldots = J_{q+s+k} = 0, \quad \max_{1 \le i \le q} J_i \to \min$$

$$\text{где} \quad J_i = \gamma_i(T, x(0), x(T)) + \int_0^T \varphi_i[T, t, x(t), x(T-t), u(t)]\, dt.$$

9

$$\dot{x}(t) = \int_0^t f(t, \theta, x(\theta), u(\theta)), \quad u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \ (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$
$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$\text{где} \quad J_i = \gamma_i\left(x(0), x(T), \int_0^T \varphi_i\left[t, x(t), u(t), \int_t^T \xi_i(s, x(s), u(s))\, ds\right] dt\right).$$

10

$$\dot{x}(t) = \int_0^t f(t, \theta, x(\theta), u(\theta)), \quad u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \ (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$
$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$\text{где} \quad J_i = P_i\left(x(0), x(T), \int_0^T \varphi_i\left[t, x(t), u(t)\right] dt\right),$$

причем управление $u(t)$ является периодической функцией периода $h > 0$, т.е. $u(t+h) = u(t)$.

11

$$\dot{x}(t) = f_1[t, x(t), u(t), x(0), x(T)] + \int_0^t f[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \le t \le T.$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T \ne \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \dots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \dots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \gamma_i \left(\int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt,\ x(0), x(T), T \right).$$

12

$$\dot{x}(t) = f_1[t, x(t), y(t), u(t)] + \int_0^t f[t, \theta, x(\theta), y(\theta), u(\theta)]\, d\theta,$$

$$u(t) \in \Omega_u \subset \mathbb{R}^m,\ \dot{y}(t) - f_2(t, x(t), u(t)) \in \Omega_y \subset \mathbb{R}^l, \quad 0 \le t \le T,\ T \ne \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \dots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \dots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \gamma_i \left(\int_0^T \varphi_i[t, x(t), y(t), u(t)]\, dt,\ y(0), y(T), x(0), x(T), T \right).$$

13

$$\dot{x}(t) = \int_0^t f[t, \theta, x(\theta), x(t-\theta), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \le t \le T.$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T \ne \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \dots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \dots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := P_i \left(\int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt, x(0), x(T), T \right).$$

14

$$\dot{x}(t) = \int_0^t f[t, \theta, x(\theta), x(t-\theta), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \le t \le T.$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_{q+1} \le 0, \dots, J_{q+s} \le 0, \quad J_{q+s+1} = \dots = J_{q+s+k} = 0, \quad \max_{1 \le i \le q} J_i \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i \left[t, x(t), x(T-t), u(t), \int_t^T \xi_i(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \right] dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

15

$$\dot{x}(t) = \int_0^t f_1[t, \theta, x(\theta), y(\theta), x(t-\theta), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \le t \le T.$$

$$u(t) \in \Omega_u \subset \mathbb{R}^m, \dot{y}(t) - f_2(t, y(t), u(t)) \in \Omega_y \subset \mathbb{R}^l, \quad 0 \le t \le T, T \ne \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \dots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \dots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := P_i \left(\int_0^T \varphi_i[t, x(t), y(t), u(t)]\, dt, x(0), x(T), y(0), y(T), T \right).$$

16

$$\dot{x}(t) = F\left(t, x(t), u(t)\right) + \int\limits_{\nu(t)}^{t} f[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T \ne \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \gamma_i \left[\int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt,\, T, x(0), x(T) \right].$$

где $\nu(\cdot)$ – заданная функция и $0 \le \nu(t) \le t$.

17

$$\dot{x}(t) = F\left(t, x(t), u(t), \int_0^t \int_{\nu(\tau)}^{\tau} f[\tau, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta\, d\tau \right), \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i\left(x(0), x(T)\right).$$

где $\nu(\cdot)$ – заданная функция и $0 \le \nu(t) \le t$.

18

$$\dot{x}(t) = \int\limits_{\nu_1(t)}^{\nu_2(t)} f[t, \theta, x(\theta), x(t-\theta), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T \ne \text{fix},$$

$$J_{q+1} \le 0, \ldots, J_{q+s} \le 0, \quad J_{q+s+1} = \ldots = J_{q+s+k} = 0, \quad \max_{1 \le i \le q} J_i \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i\left(x(0), x(T)\right).$$

где $\nu_1(\cdot), \nu_2(\cdot)$ – заданные функции и $0 \le \nu_1(t) \le \nu_2(t) \le t$.

19

$$\dot{x}(t) = \int\limits_{0}^{\nu_1(t)} f_1[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta + \int\limits_{\nu_2(t)}^{t} f_2[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i\left(x(0), x(T)\right).$$

где $\nu_1(\cdot), \nu_2(\cdot)$ – управления, которые должны удовлетворять условию. $\tau_1(t) \le \nu_1(t) \le \tau_2(t)$, $\tau_1(t) \le \nu_2(t) \le \tau_2(t)$, при этом $\tau_1(\cdot), \tau_2(\cdot)$ – заданные функции и $0 \le \tau_1(t) \le \tau_2(t) \le t$.

20

$$\dot{x}(t) = \int\limits_{t\nu_1(t)}^{t\nu_2(t)} f[t,\theta,x(\theta),u(\theta)]\,d\theta, \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_{q+1} \le 0, \ldots, J_{q+s} \le 0, \quad J_{q+s+1} = \ldots = J_{q+s+k} = 0, \quad \max_{1\le i\le q} J_i \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t,x(t),u(t)]\,dt + \gamma_i\left(x(0),x(T)\right).$$

где $\nu_1(\cdot),\nu_2(\cdot)$ – управления, которые должны удовлетворять условию $\tau_1 \le \nu_1(t) \le \nu_2(t) \le \tau_2$, где $\tau,\tau_2 \in [0;1]$ – заданные числа.

21

$$\dot{x}(t) = \int_0^{\tau(t)} f_1[t,\theta,x(\theta)]\,d\theta + \int_{t-\tau(t)}^{t} f_2[t,\theta,x(\theta)]\,d\theta, \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m,\ 0 \le t \le T, \quad T \ne \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := P_i\left(\int_0^T \varphi_i[t,x(t),u(t)]\,dt, T, x(0), x(T)\right).$$

где функция $\tau(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\tau(t) = \int_0^t r(t,\theta,x(\theta),u(\theta))\,d\theta, \quad 0 \le r(t,\theta,x,u) < 1,\ 0 \le t \le T$$

22

$$\dot{x}(t) = \int_{\tau(t)}^{t} f_1[t,\theta,x(\theta)]\,d\theta + f_2(t,x(t),\tau(t),u(t)), \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T\text{fix},$$

$$J_{q+1} \le 0, \ldots, J_{q+s} \le 0, \quad J_{q+s+1} = \ldots = J_{q+s+k} = 0, \quad \max_{1\le i\le q} J_i \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t,x(t),u(t)]\,dt + \gamma_i[x(0),x(T)].$$

где $\tau(t)$ — решение дифференциального уравнения
$\dot{\tau}(t) = r[t,\tau(t),x(t),u(t)]$, $0 \le t \le T$, $\tau(0) = 0$ и $0 \le r(t,\tau,x,u) < 1$.

23

$$\dot{x}(t) = f_1\left(t,x(t),u(t)\right) + \int_0^t f_2[t,\theta,x(\varphi(t,\theta)),u(\theta)]\,d\theta, \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T \ne \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \left|\int_0^T \varphi_i[t,x(t),u(t)]\,dt\right| + \gamma_i[T,x(0),x(T)]$$

где $0 \le \varphi(t,\theta) \le t$ — заданная функция переменных $0 \le \theta \le t$, функции φ_i, γ_i принимают скалярные значения, $|\cdot|$ – абсолютная величина числа.

24

$$\dot x(t) = \int_0^t f_1[t,\theta,x(\varphi(t,\theta)),y(\varphi(t,\theta)),u(\theta)]\,d\theta,$$

$$u(t)\in\Omega\subset\mathbb{R}^m,\ \dot y(t)-f_2(t,x(t),y(t),u(t))\in\Omega'\subset\mathbb{R}^l,\quad 0\le t\le T,\quad T=\text{fix},$$

$$J_1\le 0,\dots,J_s\le 0,\quad J_{s+1}=\ldots=J_{s+k}=0,\quad J_0\to\min$$

$$J_i := P_i\left(x(0),x(T),\int_0^T \varphi_i[t,x(t),u(t)]\,dt\right).$$

где $0\le\varphi(t,\theta)\le t$ — заданная функция переменных $0\le\theta\le t$.

25

$$\dot x(t) = a(t)+\int\limits_0^t f\left[t,\theta,x(\theta),\int\limits_0^{\varphi(t,\theta)}\alpha(s,x(s),u(s))ds\right]d\theta$$

$$u(t)\in\Omega\subset\mathbb{R}^m,\quad 0\le t\le T,\quad T\ne\text{fix},$$

$$J_1\le 0,\dots,J_s\le 0,\quad J_{s+1}=\ldots=J_{s+k}=0,\quad J_0\to\min$$

$$J_i := P_i\left(x(0),x(T),\int_0^T \varphi_i[t,x(t),u(t)]\,dt\right).$$

где $0\le\varphi(t,\theta)\le t$ — заданная функция переменных $0\le\theta\le t$.

26

$$\dot x(t) = g\left(t,x(0),x(T),\int_0^t f[t,\theta,x(t-\theta),u(\theta)]\,d\theta\right),\quad 0\le t\le T.$$

$$u(t)\in\Omega\subset\mathbb{R}^m\quad (0\le t\le T),\quad T=\text{fix},$$

$$J_{q+1}\le 0,\dots,J_{q+s}\le 0,\quad J_{q+s+1}=\ldots=J_{q+s+k}=0,\quad \max_{1\le i\le q} J_i\to\min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t,x(t),u(t)]\,dt+\gamma_i[x(0),x(T)].$$

27

$$\dot x(t) = g\left(t,\int_{\tau(t)}^t f[t,\theta,x(\theta),u(\theta)]\,d\theta\right),\quad 0\le t\le T.$$

$$u(t)\in\Omega\subset\mathbb{R}^m\quad (0\le t\le T),\quad T\ne\text{fix},$$

$$J_1\le 0,\dots,J_s\le 0,\quad J_{s+1}=\ldots=J_{s+k}=0,\quad J_0\to\min$$

$$J_i := \gamma_i\left[\int_0^T \varphi_i[t,x(t),u(t)]\,dt,x(0),x(T)\right].$$

функция $\tau(t)$ задана, $\tau(t)\in[0;t]$.

28

(система с разрывной по управлению правой частью)

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), u(t)], \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_{q+1} \le 0, \ldots, J_{q+s} \le 0, \quad J_{q+s+1} = \ldots = J_{q+s+k} = 0, \quad \max_{1 \le i \le q} J_i \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

где $f(t,x,u) = f^j(t,x,u)$, $\varphi_i(t,x,u) = \varphi_i^j(t,x,u)$ при $u \in \Omega_j$, $\Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_N = \Omega$ — разбиение множества $\Omega = \{u\}$ на непересекающиеся подмножества и $f^i(t,x,u)$, $\varphi_i^j(t,x,u)$ – непрерывные по $t, x, u \in \bar{\Omega}_j$ функции, гладкие по x.

29

(система с разрывной по управлению правой частью)

$$\dot{x}(t) = \int_0^t f[t, \tau, x(\tau), u(\tau)] d\tau, \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T \ne \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \gamma_i \left[\int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt,\ x(0), x(T), T \right].$$

где $f(t,x,u) = f^j(t,x,u)$ при $u \in \Omega_j$, $\Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_N = \Omega$ — разбиение множества $\Omega = \{u\}$ на непересекающиеся подмножества и $f^j(t,x,u)$ – непрерывна по $t, x, u \in \bar{\Omega}_j$ и гладкая по x.

30

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T \ne \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \gamma_i \left[\int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt,\ x(0), x(T) \right].$$

$$x(t) = a(t) + \int_0^t f[t, \theta, x(t-\theta), u(\theta)]\, d\theta,\ 0 \le t \le T,$$

31

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_{q+1} \le 0, \ldots, J_{q+s} \le 0, \quad J_{q+s+1} = \ldots = J_{q+s+k} = 0, \quad \max_{1 \le i \le q} J_i \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i \left[x(0), x(T)\right].$$

$$x(t) = f_1(t, x(0), x(T)) + \int_{T-t}^T f_2[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta,\ 0 \le t \le T,$$

32

Управление пучком частиц. Состояние $x \in \mathbb{R}^n$ — это непрерывная функция $x = x(t,a)$ времени t и параметра $a \in \mathbb{R}^n$, "нумерующего"частицы и меняющегося в пределах ограниченной области $A \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей.

$$\frac{\partial x(t,a)}{\partial t} = f[t,a,x(t,a),u(t)], \quad 0 \le t \le T, \quad a \in A,$$

$$x(0,a) = a \quad (a \in A), \quad u(t) \in \Omega, \quad 0 \le t \le T,$$

$$J_{q+1} \le 0, \ldots, J_{q+s} \le 0,\ J_{q+s+1} = \ldots = J_{q+s+k} = 0, \max_{1 \le i \le q} J_i \to \min,$$

$$J_i := \int_0^T \int_A \varphi_i[t,a,x(t,a),u(t)]\,dt\,da, \quad T = \text{fix}.$$

33

Управление пучком частиц. Состояние $x \in \mathbb{R}^n$ — это непрерывная функция $x = x(t,a)$ времени t и параметра $a \in \mathbb{R}^n$, "нумерующего"частицы и меняющегося в пределах ограниченной области $A \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей.

$$\frac{\partial x(t,a)}{\partial t} = f[t,a,x(t,a),u(t)], \quad 0 \le t \le T, \quad a \in A,$$

$$x(0,a) = a \quad (a \in A), \quad u(t) \in \Omega, \quad 0 \le t \le T,$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0,\ J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, J_0 \to \min,$$

$$J_i := P_i\left(\int_A \gamma_i[a,x(T,a)]da, \int_0^T \int_A \varphi_i[t,a,x(t,a),u(t)]\,dt\,da\right), \quad T = \text{fix}.$$

34

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \gamma_i\left[\int_0^T \varphi_i[t,x(t),u(t)]\,dt, x(0), x(T)\right].$$

$$x(t) = g\left(t, \int_0^T f[t,\theta,x[\eta(t,\theta)],u(\theta)]\,d\theta\right),\ 0 \le t \le T,$$

где функция $\eta(t,\theta) \in [0,T]$ переменных $0 \le t,\theta \le T$ задана и $\partial\eta/\partial\theta(t,\theta) \ne 0$.

35

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_{q+1} \le 0, \ldots, J_{q+s} \le 0, \quad J_{q+s+1} = \ldots = J_{q+s+k} = 0, \quad \max_{1 \le i \le q} J_i \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t,x(t),u(t)]\,dt + \gamma_i[x(0),x(T)].$$

$$x(t) = \int_0^T f[t,\theta,x(\theta),x[\eta(t,\theta)],u(\theta)]\,d\theta,\ 0 \le t \le T,$$

где функция $\eta(t,\theta) \in [0,T]$ переменных $0 \le t,\theta \le T$ задана.

36

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T \ne \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \gamma_i \left[\int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt,\ x(0), x(T) \right].$$

$$x(t) = F_1 \left(t, \int_0^t f_1[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta \right) + F_2 \left(t, \int_0^T f_2[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta \right),\ 0 \le t \le T$$

37

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_{q+1} \le 0, \ldots, J_{q+s} \le 0, \quad J_{q+s+1} = \ldots = J_{q+s+k} = 0, \quad \max_{1 \le i \le q} J_i \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

$$x(t) = \int_0^T f[t, \theta, x[\eta(\theta, u(\theta))], u(\theta)]\, d\theta,\ 0 \le t \le T,$$

где заданная функция $\eta(\theta, u) \in [0, T]$ переменных t, u непрерывна.

38

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T \ne \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \gamma_i \left[\int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt,\ T, x(0), x(T) \right].$$

$$g \left(t, x(t), \int_0^T f[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta \right) = 0_{\mathbb{R}^l}, \quad 0 \le t \le T,$$

размерности векторов $x, g = g(t, x_1, x_2)$ и $f = f(t, \theta, x, u)$ могут быть различны и $\operatorname{rank} \frac{\partial g}{\partial x_1}(t, x_1, x_2) = l$.

39

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i \left[x(0), x(T) \right].$$

$$g \left(t, x(t), \int_0^T f_1[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta \right) + \int_0^t f_2[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta = 0_{\mathbb{R}^l}, \quad 0 \le t \le T,$$

размерности векторов $x, g = g(t, x_1, x_2)$ и $f = f(t, \theta, x, u)$ могут быть различны и $\operatorname{rank} \frac{\partial g}{\partial x_1}(t, x_1, x_2) = l$.

40

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \dots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \dots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \gamma_i \left[\int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt,\ x(0), x(T), x(t_i) \right].$$

$$x(t) = \int_0^T f[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta + g(t, x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)), \quad 0 \le t \le T,$$

где $0 \le t_1 \le \dots \le t_N \le T$, $t_i \ne \text{fix}$, $N = fix$.

41

$$x(t) = \int_0^{t_1} f_0[t, \theta, x(\theta), u(\theta)] d\theta + \int_{t_1}^{t_2} f_1[t, \theta, x(\theta), u(\theta)] d\theta + \dots + \int_{t_N}^T f_N[t, \theta, x(\theta), u(\theta)] d\theta = 0,$$

$$g\left[\int_0^{t_1} \eta_0(t, x(t), u(t)) dt,\ \int_{t_1}^{t_2} \eta_1(t, x(t), u(t)) dt, \dots, \int_{t_N}^T \eta_N(t, x(t), u(t)) dt \right] = 0,$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m; \quad 0 \le t \le T, \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \dots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \dots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

где $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N < T$ и $t_i \ne \text{fix}$.

42

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T \ne \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \dots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \dots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \gamma_i \left[\int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt, x(0), x(T) \right].$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t f_1[t, \theta, x(\theta), y(\theta), u(\theta)] d\theta, \\ y(t) &= \int_0^T f_2[t, \theta, x(\theta), y(\theta), u(\theta)]\, d\theta,\ 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

43

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), u(t)] \text{ при } 0 \le t \le T,\ t \ne \bar{t},$$

$$x(\bar{t} + 0) = g[x(\bar{t} - 0), v],$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T \ne \text{fix},$$

$$J_{q+1} \le 0, \dots, J_{q+s} \le 0, \quad J_{q+s+1} = \dots = J_{q+s+k} = 0, \quad \max_{1 \le i \le q} J_i \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

где $0 < \bar{t} < T$, $\bar{t} = \text{fix}$ и выбор постоянного управления $v \in \mathbb{R}^l$ ограничен соотношениями

$$d_1(\nu) \le 0, \dots, d_\sigma(\nu) \le 0,\ d_{\sigma+1}(\nu) = \dots = d_{\sigma+\mu}(\nu) = 0.$$

44

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), u(t)] \text{ при } 0 \le t \le T,\ t \ne t_1, t_2, \ldots, t_N,$$
$$x(t_i + 0) = g_i[x(t_i - 0), v],$$
$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \gamma_i \left[\int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt, x(0), x(T) \right].$$

где $0 < t_1 < \ldots < t_N < T$, $t_i \ne \text{fix}$ и выбор постоянного управления $v \in \mathbb{R}^l$ ограничен соотношениями

$$d_1(\nu) \le 0, \ldots, d_\sigma(\nu) \le 0,\ d_{\sigma+1}(\nu) = \ldots = d_{\sigma+\mu}(\nu) = 0.$$

45

(Система с распределенным запаздыванием нейтрального типа.)

Считаем, что состояние $x(t)$ задано при $-h \le t \le T$, а управление $u(t)$ при $-h \le t \le T$, число $h > 0$ задано.

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t), u(t)) + \int_{t-h}^t f[t, \theta, \dot{x}(\theta), x(\theta), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \le t \le T,$$

$u(t) \in \Omega$ $(-h \le t \le T)$, $x(t) = x_0(t)$ $(-h \le t \le 0)$,
$J_{q+1} \le 0, \ldots, J_{q+s} \le 0$, $J_{q+s+1} = \ldots = J_{q+s+k} = 0$, $\max\limits_{1 \le i \le q} J_i \to \min$,

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t), u(t)]\, dt,$$

$T = \text{fix}$.

46

Считаем, что состояние $x(t)$ задано при $-h \le t \le T$, а управление $u(t)$ при $0 \le t \le T$, число $h > 0$ задано.

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), x(t-h), u(t)], \quad 0 \le t \le T,$$

$u(t) \in \Omega$, $(0 \le t \le T)$, $x(t) = x_0(t) \in X \subset \mathbb{R}^n$ $(-h \le t \le 0)$,
$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0$, $J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0$, $J_0 \to \min$,

$$J_i := \gamma_i \left[\int_0^T \varphi_i[t, x(t), x(t-h), u(t)]\, dt,\ x(0+0), x(T), T \right],$$

$T \ne \text{fix}$, рассматриваем разрывные в точке $t = 0$ решения $x(\cdot)$. Функция $x_0(t)$ переменной $t \in [-h, 0]$ не задана, а является управлением, выбираемым произвольно в пределах заданного множества X.

47

Считаем, что состояние $x(t)$ задано при $-h \le t \le T$, а управление $u(t)$ при $0 \le t \le T$, число $h > 0$ задано.

$$\dot{x}(t) = \int_0^t f[t, \theta, x(\theta), x(\theta - h), u(\theta)] d\theta, \quad 0 \le t \le T,$$

$u(t) \in \Omega$, $(0 \le t \le T)$, $x(t) = x_0(t)$ $(-h \le t \le 0)$,
$J_{q+1} \le 0, \ldots, J_{q+s} \le 0$, $J_{q+s+1} = \ldots = J_{q+s+k} = 0$, $\max\limits_{1 \le i \le q} J_i \to \min$,

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), x(t-h), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0+0), x(T), T],$$

$T \ne \text{fix}$, функция $x_0(t)$ задана, рассматриваем разрывные в точке $t = 0$ решения $x(\cdot)$.

Считаем, что состояние $x(t)$ задано при $-h \leq t \leq T$, а управление $u(t)$ при $0 \leq t \leq T$, число $h > 0$ задано.

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), x(t-h), u(t)] + \int_0^t f_1(t, \theta, x(\theta), x(\theta - h), u(\theta)) d\theta, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$u(t) \in \Omega$, $(0 \leq t \leq T)$, $x(t) = x_0(t)$ $(-h \leq t \leq 0)$,
$J_1 \leq 0, \ldots, J_s \leq 0$, $J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0$, $J_0 \to \min$,

$$J_i := \gamma_i \left[\int_0^T \varphi_i[t, x(t), x(t-h), u(t)]\, dt,\, T, x(T) \right],$$

$T \neq \text{fix}$, функция $x_0(t)$ задана, рассматриваем непрерывные решения $x(\cdot)$.