Символами t, θ обозначаются независимые переменные, символами x, y, z — векторы состояния (вообще, разных размерностей), а символами u, v, w — векторы управления (тоже, возможно, разных размерностей). Запись $T = \text{fix}$ означает, что момент времени T задан, запись $T \neq \text{fix}$ — что он не задан, а подлежит определению из условия оптимума. При решении описанных ниже задач должны быть сделаны необходимые предположения о свойствах функций, входящих в задачу. Таким образом, свойства этих функций — составная часть ответа.

1

$$\dot{x}(t) = \int_0^t f[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \leq t \leq T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \leq 0, \ldots, J_s \leq 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

2

$$\dot{x}(t) = \int_0^t f[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \leq t \leq T), \quad T \neq \text{fix},$$

$$J_1 \leq 0, \ldots, J_s \leq 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

3

$$\dot{x}(t) = f_1[t, x(t), u(t)] + \int_0^t f[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \leq t \leq T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \leq 0, \ldots, J_s \leq 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

4

$$\dot{x}(t) = \int_0^t f[t, \theta, x(t - \theta), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \leq t \leq T.$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \leq t \leq T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \leq 0, \ldots, J_s \leq 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

5

$$\dot{x}(t) = \int_0^t f[t, \theta, x(t-\theta), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \le t \le T.$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T \ne \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \dots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \dots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

6

$$\dot{x}(t) = \int_{t-\tau(t)}^t f[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \dots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \dots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

где $\tau(t) \ge 0$ — заданная функция, причем $t - \tau(t) \ge 0$.

7

$$\dot{x}(t) = \int_{t-\tau(t)}^t f[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T \ne \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \dots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \dots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

где $\tau(t) \ge 0$ — заданная функция, причем $t - \tau(t) \ge 0$.

8

$$\dot{x}(t) = \int_0^t f[t, \theta, x(\varphi(t, \theta)), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \dots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \dots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

где $0 \le \varphi(t, \theta) \le t$ — заданная функция переменных $0 \le \theta \le t$.

9

$$\dot{x}(t) = \int_0^t f[t, \theta, x(\varphi(t,\theta)), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T \ne \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

где $0 \le \varphi(t,\theta) \le t$ — заданная функция переменных $0 \le \theta \le t$.

10

$$\dot{x}(t) = g(t, \int_0^t f[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta), \quad 0 \le t \le T.$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

11

$$\dot{x}(t) = g(t, \int_0^t f[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta), \quad 0 \le t \le T.$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T \ne \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

12

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), u(t)], \quad 0 \le t \le T, \quad u(t+h) = u(t),$$

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

где $h > 0$ — заданное число, т.е., рассматриваются только h-периодические управления $u(t)$.

13

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), \int_0^T \alpha[\theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta), \quad 0 \le t \le T,$$
$$q(\int_0^T r[t, x(t), u(t)]\, dt) = 0.$$
$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

14

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), u(t)], \quad 0 \le t \le T,$$
$$g[x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_N)] = 0,$$
$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

где $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N < T$ и $t_i = \text{fix}$.

15

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), u(t)], \quad 0 \le t \le T,$$
$$g[x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_N)] = 0,$$
$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

где $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N < T$ и $t_i \ne \text{fix}$.

16

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), u(t)], \quad 0 \le t \le T,$$
$$\sum_i \int_0^T q_i^j[t, x(t), u(t)]\, dt \cdot \int_0^T r_i^j[t, x(t), u(t)]\, dt = 0 \; (j = 1, \ldots, l).$$
$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

17

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), u(t)] \text{ при } 0 \le t \le T,\ t \ne \bar{t},$$
$$x(\bar{t}+0) = g[x(\bar{t}-0), v],$$
$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$
$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$
$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

где $0 < \bar{t} < T$, $\bar{t} = \text{fix}$ и выбор постоянного управления $v \in \mathbb{R}^l$ ограничен соотношениями

$$d_1(\nu) \le 0, \ldots, d_\sigma(\nu) \le 0,\ d_{\sigma+1}(\nu) = \ldots = d_{\sigma+\mu}(\nu) = 0.$$

18

(Дифференциальное уравнение с разрывной по управлению правой частью.)

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$
$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$
$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$
$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), u(t)], \quad 0 \le t \le T,$$

где $f(t,x,u) = f_i(t,x,u)$ при $u \in \Omega_i$, $\Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_N = \Omega$ — разбиение множества $\Omega = \{u\}$ на непересекающиеся подмножества и $f_i(t,x,u)$ — непрерывная по $t, x, u \in \bar{\Omega}_i$ функция, гладкая по x.

19

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$
$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$
$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$
$$x(t) = a(t) + \int_0^t f[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta,\ 0 \le t \le T,$$
$$q(\int_0^T r[t, x(t), u(t)]\, dt) = 0.$$

20

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

$$x(t) = \int_0^T f[t, s, x[\eta(t,\theta)], u(\theta)]\, d\theta,\ 0 \le t \le T,$$

где функция $\eta(t,\theta) \in [0,T]$ переменных $0 \le t, \theta \le T$ задана и $\partial\eta/\partial\theta(t,\theta) \ne 0$.

21

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

$$x(t) = \int_0^T f[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta + \sum_{i=1}^N g_i[t, x(t_i)], \quad 0 \le t \le T,$$

где $0 \le t_1 \le \ldots \le t_N \le T$, $t_i = \text{fix}$.

22

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

$$x(t) = \int_0^T f[t, \theta, x(\theta), x[\varphi(t,\theta)], u(\theta)]\, d\theta,\ 0 \le t \le T,$$

где $0 \le \varphi(t,\theta) \le T$ — заданная функция переменных t, θ.

23

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

$$x(t) = g\{t, \int_0^T f[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta\}, \quad 0 \le t \le T.$$

24

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

$$g\{t, x(t), \int_0^T f[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta\} = 0_{\mathbb{R}^l}, \quad 0 \le t \le T,$$

размерности векторов $x, g = g(t, x_1, x_2)$ и $f = f(t, \theta, x, u)$, вообще говоря, различны, $\text{rank}\frac{\partial g}{\partial x_1}(t, x_1, x_2) = l$.

25

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (0 \le t \le T), \quad T = \text{fix},$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0, \quad J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, \quad J_0 \to \min$$

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0), x(T)].$$

Фазовые переменные $x = \|x_i\| \in \mathbb{R}^n$ разбиты на две группы $y = \text{col}(x_1, \ldots, x_{u'})$ и $z = \text{col}(x_{n'+1}, \ldots, x_n)$, причем

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f_1[t, x(t), u(t)], \qquad 0 \le t \le T, \\ z(t) &= \int_0^T f_2[t, \theta, x(\theta), u(\theta)]\, d\theta,\ 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

26

Управление пучком частиц. Состояние $x \in \mathbb{R}^n$ — это непрерывная функция $x = x(t, a)$ времени t и параметра $a \in \mathbb{R}^n$, "нумерующего"частицы и меняющегося в пределах ограниченной области $A \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей.

$$\frac{\partial x(t, a)}{\partial t} = f[t, a, x(t, a), u(t)], \quad 0 \le t \le T, \quad a \in A,$$

$$x(0, a) = a \quad (a \in A), \quad u(t) \in \Omega, \quad 0 \le t \le T,$$

$$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0,\ J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0, J_0 \to \min,$$

$$J_i := \int_0^T \int_A \varphi_i[t, a, x(t, a), u(t)]\, dt\, da,$$

$$T = \text{fix}.$$

27

Считаем, что состояние $x(t)$ задано при $-h \le t \le T$, а управление $u(t)$ при $0 \le t \le T$, число $h > 0$ задано.

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), x(t-h), u(t)], \quad 0 \le t \le T,$$

$u(t) \in \Omega$, $(0 \le t \le T)$, $x(t) = x_0(t)$ $(-h \le t \le 0)$,
$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0$, $J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0$, $J_0 \to \min$,

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), x(t-h), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(T)],$$

$T = \text{fix}$, функция $x_0(t)$ задана, рассматриваем непрерывные решения $x(\cdot)$.

28

Считаем, что состояние $x(t)$ задано при $-h \le t \le T$, а управление $u(t)$ при $0 \le t \le T$, число $h > 0$ задано.

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), x(t-h), u(t)], \quad 0 \le t \le T,$$

$u(t) \in \Omega$, $(0 \le t \le T)$, $x(t) = x_0(t)$ $(-h \le t \le 0)$,
$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0$, $J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0$, $J_0 \to \min$,

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), x(t-h), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0+0), x(T)],$$

$T = \text{fix}$, функция $x_0(t)$ задана, рассматриваем разрывные в точке $t = 0$ решения $x(\cdot)$.

29

Считаем, что состояние $x(t)$ задано при $-h \le t \le T$, а управление $u(t)$ при $0 \le t \le T$, число $h > 0$ задано.

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), x(t-h), u(t)], \quad 0 \le t \le T,$$

$u(t) \in \Omega$, $(0 \le t \le T)$, $x(t) = x_0(t)$ $(-h \le t \le 0)$,
$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0$, $J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0$, $J_0 \to \min$,

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), x(t-h), u(t)]\, dt + \gamma_i[x(0+0), x(T)],$$

$T = \text{fix}$, рассматриваем разрывные в точке $t = 0$ решения $x(\cdot)$. Функция $x_0(t)$ переменной $t \in [-h, 0]$ не задана, а является управлением, выбираемым произвольно в пределах заданного множества $x_0(t) \in X \subset \mathbb{R}^n$; минимизируем по $[x(\cdot), x_0(\cdot), u(\cdot)]$.

30

(Система с распределенным запаздыванием нейтрального типа.)

Считаем, что состояние $x(t)$ задано при $-h \le t \le T$, а управление $u(t)$ при $-h \le t \le T$, число $h > 0$ задано.

$$\dot{x}(t) = \int_{t-h}^{t} f[t, \theta, \dot{x}(\theta), x(\theta), u(\theta)]\, d\theta, \quad 0 \le t \le T,$$

$u(t) \in \Omega$ $(-h \le t \le T)$, $x(t) = x_0(t)$ $(-h \le t \le 0)$,
$J_1 \le 0, \ldots, J_s \le 0$, $J_{s+1} = \ldots = J_{s+k} = 0$, $J_0 \to \min$,

$$J_i := \int_0^T \varphi_i[t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t), u(t)]\, dt,$$

$T = \text{fix}$.