Санкт-Петербургский государственный университет

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО КУРСУ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

Санкт-Петербург 1994

Утверждено на заседании кафедры теоретической кибернетики математико-механического факультета
Составитель проф. А.С.Матвеев
Рецензент проф. А.Х.Гелиг

Обозначения и терминология

$\mathbb{R}$ – вещественная ось;
mes E – мера Лебега множества E;
yak $g(x_*)$ – матрица Якоби функции $g(x) = \|g_i(x)\| \in \mathbb{R}^k$ переменной $x = \|x_j\| \in O = \operatorname{int} O \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x_* \in O$, т.е.

$$\text{yak } g(x_*) := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_*) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x_*) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(x_*) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(x_*) \end{pmatrix};$$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x_*, y_*)$ – частная матрица Якоби функции $g(x,y) = \|g_i(x,y)\| \in \mathbb{R}^k$ переменных $(x,y) \in O = \operatorname{int} O \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ по $x \in \mathbb{R}^n$ в точке $(x_*, y_*) \in O$, т.е. $\frac{\partial g}{\partial x}(x_*, y_*) := \text{yak } q(x_*)$, где $q(x) := g(x, y_*)$;

Для конечного интервала $\Delta = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ вещественной оси

$C(\Delta \to \mathbb{R}^d)$ – пространство непрерывных вектор-функций $x : \Delta \to \mathbb{R}^d$ с нормой $|x(\cdot)|_C := \max_{t\in\Delta} |x(t)|$;

$L_p(\Delta \to \mathbb{R}^d)$ (где $p \in [1, \infty]$) – лебегово пространство;

$|x(\cdot)|_p := \left(\int_\Delta |x(t)|^p \, dt\right)^{1/p}$, если $p \in [1, \infty)$, и $|x(\cdot)|_\infty := \text{ess } \sup_{t\in\Delta} |x(t)|$;

$W(\Delta \to \mathbb{R}^d)$ – пространство абсолютно непрерывных функций $x : \Delta \to \mathbb{R}^d$ с нормой $|x(\cdot)|_W := |x(\cdot)|_C + \int_\Delta |\dot{x}(t)| \, dt$;

$PC(\Delta \to \mathbb{R}^d)$ – совокупность всех кусочно-непрерывных вектор-функций $x : \Delta \to \mathbb{R}^d$.

Функцию $x(\cdot)$ называем *кусочно-непрерывной*, если она непрерывна всюду за исключением конечного числа точек, в которых эта функция имеет односторонние пределы. Для определенности считаем, что $x(t) = x(t-0)$, если $t > t_0$, и $x(t_0) = x(t_0 + 0)$.

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – линейные нормированные пространства, $\mathcal{U}$ – метрическое пространство и $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{X}, \mathcal{O}_{x,u} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ – открытые множества. *Производная Гато* (соответственно *Фреше*) функции $f : \mathcal{O}_x \to \mathcal{Y}$ в точке $x_* \in \mathcal{O}_x$ – это такой непрерывный линейный оператор $f'(x_*) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, что $f'(x_*) h = \lim_{\alpha\to+0} \alpha^{-1} [f(x_* + \alpha h) - f(x_*)]$ $(\forall h \in \mathcal{X})$ (соответственно такой, что $f(x_* + h) = f(x_*) + f'(x_*) h + \mathfrak{o}(h)$, где $\mathfrak{o}(h)/|h| \to 0$ при $h \to 0$.) *Частная производная Гато (Фреше)* $f'_x(x_*, u_*)$ функции $f : \mathcal{O}_{x,u} \to \mathcal{Y}$ по x

в точке $(x_*, u_*) \in \mathcal{O}_{x,u}$ – это производная Гато (Фреше) $q'(x_*)$ отображения $q(x) := f(x, u_*)$.

§1. Задачи оптимального управления и их абстрактная форма записи

1.1. Постановка задачи оптимального управления и связанные с ней понятия. Методические указания касаются одной из основных частей курса "Теоретическая кибернетика— математической теории оптимального управления. Эта теория изучает объекты и процессы, на состояние которых можно целенаправленно воздействовать, т.е. которыми можно управлять. Часто оказывается, что много вариантов воздействия позволяют достичь цели управления. Тогда естественно желание выбрать среди них наилучшее, т.е. оптимальное управляющее воздействие. Его поиск составляет содержание *задачи оптимального управления.*

Читатель без труда может вспомнить многочиленные и разнообразные примеры подобных задач. Каждая из них формулируется на языке той области, к которой она относится. Однако, чтобы применить к такой задаче математические методы, необходимо перевести ее постановку на язык математики, т.е. построить ее *математическую модель.*

Это построение обычно начинают с выбора переменных для описания управляющего воздействия, а также для описания состояния *объекта управления*, т.е. того объекта, устройства или процесса, которыми мы управляем. Пусть нас интересует его эволюция при $0 \leq t \leq T$. Довольно часто текущее состояние объекта управления (т.е. его состояние в текущий момент времени t) удается описать конечным набором скалярных переменных $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$. Их называют *переменными состояния* и часто объединяют $x(t) := [x_1(t), \ldots, x_n(t)]$, образуя *вектор состояния в момент* t. Все, что происходит с объектом управления на рассматриваемом интервале времени, описывает функция $x(t) \in \mathbb{R}^n$ переменной $t \in [0, T]$, которую назовем *состоянием.*

Аналогично, во многих случаях управляющее воздействие в каждый момент времени t можно описать также конечным числом скалярных переменных $u_1 = u_1(t), \ldots, u_m = u_m(t)$. Их называют *управляющими* и часто рассматривают совместно $u(t) := [u_1(t), \ldots, u_m(t)] \in \mathbb{R}^m$, образуя *вектор управления в момент* t. Тогда управляющее воздействие, взятое в целом, т. е. в течение всего рассматриваемого временного интервала, описывается функцией $u(t)$ переменной $t \in [0, T]$, которую назовем *управлением.*

Мы рассмотрели распространенную ситуацию, которая, однако, не является единственно возможной. В частности, текущее состояние объекта и (или) текущее управляющее воздействие на него далеко не всегда удается описать конечным набором скалярных величин. Например, текущее состояние химического реактора характеризуется (в определенной идеализиции) температурным режимом и распределением плотности реагирующих веществ и катализатора по его объему. Следовательно, состояние в момент t описывается функциями $\mathfrak{T}\,(\cdot), \rho_1(\cdot), \rho_2(\cdot), \ldots$ и т.д. точки ζ реактора. Здесь $\mathfrak{T}(\zeta)$ – температура в этой точке, $\rho_1(\cdot)$ – плотность концентрации первого реагента, $\rho_2(\cdot)$ – плотность концентрации второго и т.д. Упомянутые функции принадлежат некоторым функциональным пространствам бесконечной размерности и обычно не могут быть описаны конечным числом скалярных величин.

Объект управления, текущее состояние которого и управляющее воздействие на который в каждый момент времени можно описать конечным набором скалярных величин, называют *объектом с сосредоточенными параметрами.* В противном случае говорят об *объекте с распределенными параметрами.* Излагаемая далее теория ориентирована в основном на объекты управления первого типа, т.е. с сосредоточенными параметрами. Объекты с распределенными параметрами рассматривают, как правило, отдельно, так как у них много специфических особенностей и в целом они более сложны для исследования.

Итак, средства для описания состояния объекта и управляющего воздействия на него выбраны. Следующий естественный вопрос: как именно объект реагирует на заданное управляющее воздействие, т.е. какое состояние отвечает выбранному управлению. Математические соотношения (как правило, уравнения), которые дают ответ на этот вопрос, называют *уравнениями объекта управления.*

Довольно часто (хотя далеко не всегда) это уравнение – обыкновенное дифференциальное, т.е. имеет вид

$$\dot{x}(t) = f\,[x(t), u(t), t] \quad \forall t \in [0, T]. \tag{1.1}$$

Здесь $f(x, u, t) \in \mathbb{R}^n$ – заданная вектор-функция переменных $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ и $t \in \mathbb{R}$. Пусть также известно начальное состояние объекта, т.е. его состояние в момент $t = 0$

$$x(0) = a_0. \tag{1.2}$$

Тогда состояние $x(\cdot)$, как хорошо известно, однозначно определяется соотношениями (1.1) и (1.2) по выбранному управлению $u(\cdot)$ (при естественных и неограничительных предположениях о функции $f(\cdot)$).

Рассмотрим в качестве примера линеаризованное уравнение продольного движения летательного аппарата [1]

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} = M_1\frac{d\nu}{dt} + M_2\alpha + M_3\frac{d\alpha}{dt} + M_4u + M_d(t), \tag{1.3}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\nu}{dt} - Y_1\alpha - Y_2u - Y_d(t). \tag{1.4}$$

Здесь ν – угол тангажа, α – угол атаки, u – угол отклонения рулей высоты, M_i, Y_i – аэродинамические коэффициенты, $M_d(t), Y_d(t)$ – приведенные возмущающие воздействия. Управление осуществляется выбором угла u. Полагая $x_1 := \nu, x_2 := d\nu/dt, x_3 := \alpha$ и выражая в (1.3) производную $d\alpha/dt$ из (1.4), легко привести эти уравнения к виду (1.1).

Выбирая управляющие воздействия, приходится учитывать, что часто не любое из них можно реализовать на практике. (Например, угол отклонения рулей высоты u можно изменять лишь в определенных границах $u_- \le u \le u_+$.) Поэтому необходимо явно выделить класс реализуемых управлений, называемых также *допустимыми*, и ограничить свой выбор ими. Распространена ситуация, когда допустимы любые уравления $u(\cdot)$, принимающие значения в заданном множестве

$$u(t) \in \Omega \quad \forall t \in [0, T] \tag{1.5}$$

и кусочно-непрерывные по t. Последнее означает, что есть возможность мгновенно (скачкообразно) изменить значение управления $u(t)$ в текущий момент t. В противном случае используется другое описание класса допустимых управлений, например, включающее требование гладкости функции $u(\cdot)$ и ограничение на производную $|\dot{u}(t)| \le \text{ const }$.

Пару, состоящую из допустимого управления и отвечающего ему состояния, т.е. соответствующего решения уравнений объекта управления, называют *процессом*. (В случае (1.1), (1.2), (1.5) процесс – это любая пара $[x(\cdot), u(\cdot)]$, у которой $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – кусочно-непрерывная функция переменной $t \in [0, T]$, удовлетворяющая включениям (1.5), а $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – отвечающее этой функции решение задачи Коши (1.1),(1.2).)

Следующая составляющая математической модели задачи оптимального управления – описание цели управления. Эти цели могут быть самыми разными. Например, для объекта (1.1) цель может состоять в том, чтобы перевести его из одного состояния (1.2) в другое $a_1 \in \mathbb{R}^n$. В этом случае ее описывает соотношение (1.2) и равенство $x(T) = a_1$. Другой пример – требуется из состояния (1.2) попасть на заданное многообразие $S \subset \mathbb{R}^n$, определенное уравнением $q(x) = 0_{R^k}$ $(k < n)$. В этом случае цель описывают соотношение

(1.2) и равенство $q\,[x(T)] = 0$. Иногда требуется попасть не на многообразие, а в область $\{x \in \mathbb{R}^n : r_1(x) \le 0, \ldots, r_s(x) \le 0\}$. Тогда описание цели состоит из равенства (1.2) и соотношений $r_1\,[x(T)] \le 0, \ldots, r_s\,[x(T)] \le 0$. В некоторых случаях начальное состояние объекта не задано, а подлежит определению так же, как и управление $u(\cdot)$. Тогда цель может, например, состоять в том, чтобы перевести объект с одного заданного многообразия $x(0) \in S_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : q_0(x) = 0_{R^k}\}$ на другое $x(T) \in S_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : q_1(x) = 0_{R^l}\}$. В этом случае цель описывают равенства

$$q_0\,[x(0)] = 0, \quad q_1\,[x(T)] = 0.$$

Если вместо многоообразий рассматривать области пространства $\mathbb{R}^n$, задаваемые системами неравенств, описание цели, естественно, будет другим

$$r_1\,[x(0)] \le 0, \ldots, r_p\,[x(0)] \le 0, r_{p+1}\,[x(T)] \le 0, \ldots, r_{p+q}\,[x(T)] \le 0.$$

Все рассмотренные примеры являются, как легко заметить, частными вариантами следующего описания цели управления:

$$g\,[x(0), x(T)] = 0_{R^k}, \;\; r_1\,[x(0), x(T)] \le 0, \ldots, r_s\,[x(0), x(T)] \le 0. \qquad (1.6)$$

Однако даже его нельзя признать достаточно общим: имеется масса примеров, когда цель управления описывается иначе.

Допустимым называют процесс, для которого достигаются поставленные цели, т.е. который удовлетворяет описывающим их соотношениям. Например, в случае (1.1), (1.5), (1.6) допустимый процесс – это пара $[x(\cdot), u(\cdot)]$, где $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – кусочно непрерывная функция переменной $t \in [0, T]$ со значениями в множестве Ω из (1.5), а функция $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет соотношениям (1.1) и (1.6). Задача оптимального управления возникает в ситуации, когда допустимых процессов много. Тогда можно поставить вопрос об отыскании среди них оптимального, т.е. наилучшего с той или иной точки зрения процесса. Для этого нужно выбрать отвечающий этой точке зрения способ сравнения процессов, позволяющий решить, какой из них "лучше а какой "хуже". Здесь часто используют некоторый функционал, сопоставляющий каждому допустимому процессу определенное число. Процесс считается тем лучше, чем меньше для него значение функционала. Тогда задача оптимального управления состоит в минимизации упомянутого функционала, называемого *функционалом качества*, на множестве допустимых процессов. Решение этой задачи называют *оптимальным процессом.*

В приложениях функционал качества может представлять собой величину энергетических затрат на реализацию данного процесса, стоимость этой реализации, среднее значение уклонения процесса от эталона, либо иметь какой-то другой смысл. Весьма различны и способы математического описания этого функционала. Для объекта (1.1) достаточно общим является функционал

$$\mathcal{I}\left[x(\cdot), u(\cdot)\right] := \int_0^T \varphi\left[x(t), u(t), t\right]\ dt + \eta\left[x(0), x(T)\right],$$

где $\varphi(x, u, t) \in \mathbb{R}$ и $\eta\left(x_0, x_1\right) \in \mathbb{R}$ заданные фунции переменных $x, x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ и $u \in \mathbb{R}^m$. Вместе с тем для него рассматривают и многие другие функционалы, например,

$$\mathcal{I}_1 := \max\nolimits_{t\in[0,T]} q\left[x(t)\right], \quad \mathcal{I}_2 := p\left(\int_0^T \alpha\left[x(t), u(t), t\right]\ dt\right),$$
$$\mathcal{I}_3 := \int_0^T \int_0^T \beta\left[t_1, t_2, x\left(t_1\right), x\left(t_2\right)\right]\ dt_1\ dt_2.$$

Итак, мы обсудили все основные части математичсекой модели задачи оптимального управления. Из рассмотренных при этом примеров можно составить следующий частный вариант такой модели:

$$\dot{x}(t) = f\left[x(t), u(t), t\right], \quad 0 \le t \le T, \tag{1.7}$$

$$u(t) \in \Omega, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.8}$$

$$g\left[x(0), x(T)\right] = 0_{R^k}, \ \ r_1\left[x(0), x(T)\right] \le 0, \ldots, r_s\left[x(0), x(T)\right] \le 0, \tag{1.9}$$

$$\int_0^T \varphi\left[x(t), u(t), t\right]\ dt + \eta\left[x(0), x(T)\right] \to \min. \tag{1.10}$$

Здесь число $T > 0$, множество $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, функции $f(x, u, t) \in \mathbb{R}^n$ и $\varphi(x, u, t) \in \mathbb{R}$ переменных $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, t \in [0, T]$, а также функции $g\left(x_0, x_1\right) \in \mathbb{R}^k, r_i\left(x_0, x_1\right) \in \mathbb{R}$ и $\eta\left(x_0, x_1\right) \in \mathbb{R}$ переменных $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ заданы. Задача состоит в поиске процесса, доставляющего минимум функционалу (1.10) на множестве всех пар $[x(\cdot), u(\cdot)]$, у которых вторая компонента $u : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ – кусочно-непрерывная, а первая $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ – дифференцируемая функция и которые удовлетворяют соотношениям (1.7)- (1.9). Приведенная постановка нуждается в некоторых уточнениях. (Следует, например, подробнее описать свойства функции $x(\cdot)$, обсудить вопрос о суммируемости подынтегрального выражения в (1.10) и т.п.) Эти уточнения будут сделаны впоследствии в §3. В данном параграфе мы ограничиваемся обсуждением только тех моментов, которые ясны уже на имеющемся уровне постановки задачи.

Далее рассматриваются только математические модели задач оптимального управления. Поэтому для краткости будем называть их просто "задачами оптимального управления".

Помимо рассмотренной имеется масса других постановок таких задач. Например, иногда удобно считать, что время t не непрерывно, а принимает лишь дискретные, скажем, целые значения $t = 0, \dots, T$. Тогда поведение объекта управления часто описывается разностным уравнением

$$x(t+1) = f\left[x(t), u(t), t\right], \quad t = 0, \dots, T-1.$$

В случае непрерывного времени рассматривают не только конечный, но и бесконечный временной интервал. Тогда в определении допустимого процесса часто появляются требования, оговаривающие поведение состояния и управления при $t \to \infty$, например, $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$ или $\int |u(t)|^2 \, dt < \infty$. Большой интерес представляет случай, когда временной интервал конечен, но не задан, а находится вместе с состоянием и управлением из условия оптимума функционала. Пример такой задачи мы получим, если будем считать, что в (1.7)-(1.10) момент времени $T > 0$ не задан, а допустимым процессом является не пара $[x(\cdot), u(\cdot)]$, а тройка $[T, x(\cdot), u(\cdot)]$, где $T > 0$ и функции $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ определены при $t \in [0, T]$. Компоненты этой тройки, как и ранее, должны удовлетворять соотношениям (1.7)-(1.9). В частном случае такой задачи, когда в (1.10) $\varphi(\cdot) \equiv 1$ и $\eta(\cdot) \equiv 0$, минимизируется время $\mathcal{I}\left[T, x(\cdot), u(\cdot)\right] = \int_0^T 1 \, dt = T \to \min$, за которое достигаются цели управления.

В последнем примере некоторые моменты времени играют особую роль в постановке задачи (это моменты начала $t = 0$ и окончания $t = T$ эволюции объекта), причем часть из них ($t = T$) априори не фиксирована, т.е. для разных процессов эти моменты имеют разные значения. Эта особенность выделяет целый класс разнообразных задач оптимального управления, обладающих единой спецификой.

Встречаются также самые разные уравнения объекта управления. Мы рассмотрели случай обыкновенного дифференциального уравнения и случай, когда оно разностное. Однако во многих приложениях это уравнение другое, например, интегральное

$$x(t) = \int_0^t f\left[x(\theta), u(\theta), \theta, t\right] \, d\theta \quad \text{или} \quad x(t) = \int_0^T f\left[x(\theta), u(\theta), \theta, t\right] \, d\theta,$$

либо интегродифференциальное

$$\dot{x}(t) = \int_0^t f\left[x(\theta), u(\theta), \theta, t\right] \, d\theta,$$

либо дифференциальное с запаздываниями в состоянии и управлении

$$\dot{x}(t) = f\left[x(t), x(t-h), u(t), u(t-\tau), t\right].$$

В последнем случае величина запаздываний $h > 0$ и $\tau > 0$ может зависеть от состояния и управления

$$\dot{x}(t) = f\left(x\{t\}, x\left\{t - h\left[t, x(t), u(t)\right]\right\}, u\{t\}, u\left\{t - \tau\left[t, x(t)\right]\right\}, t\right),$$

либо

$$\dot{x}(t) = f\left(x[t], x\left[t - h(t)\right], u[t], u[t-\tau]\right),$$

где $h(\cdot)$ определяется как решение задачи Коши

$$\dot{h}(t) = r\left[x(t), u(t), t\right], \quad h(0) = h_0.$$

Возможна также масса других вариантов, например, когда объект описывается каким-либо уравнением в частных производных, либо с помощью определенной комбинации уравнений разных типов и т.д. Разнообразие соотношений, описывающих цель управления или функционал качества, также чрезвычайно велико.

Итак, в приложениях встречаются разные задачи оптимального управления. Количество их вариантов очень велико и оно постоянно увеличивается. Поэтому оказалось удобным перейти от последовательного исследования каждого из упомянутых вариантов к изучению обобщающей их абстрактной модели, описываемой языком функционального анализа.

1.2. Абстрактная форма записи задач оптимального управления. Для определенности рассмотрим ее на примере задачи (1.7)-(1.10). Для этой задачи управления $u(\cdot)$ можно выбирать произвольно в пределах класса допустимых управлений

$$\boldsymbol{U}_\partial := \left\{u(\cdot) \in PC\left([0,T] \to \mathbb{R}^m\right) : u(t) \in \Omega \ \forall t \in [0,T]\right\}.$$

Его можно трактовать как метрическое пространство с метрикой $d\left[u_1(\cdot), u_2(\cdot)\right] := \int_0^T \left|u_1(t) - u_2(t)\right| \, dt$. (В дальнейшем используется другая, нетрадиционная метрика, которая, как оказалось, в некоторых отношениях удобнее.) Состояния $x(\cdot)$ являются элементами банахова пространства $\boldsymbol{X} := W\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right)$ абсолютно непрерывных вектор-функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$. Напомним, что норма в нем определена так:

$$|x(\cdot)|_W := \max_{t \in [0,T]} |x(t)| + \int_0^T |\dot{x}(t)| \, dt.$$

Фигурирующие в постановке задачи (1.7) - (1.10) уравнения $\dot{x}(t) = f\left[x(t), u(t), t\right]$ и $g\left[x(0), x(T)\right] = 0_{R^k}$ выразим единым равенством $F\left[x(\cdot), u(\cdot)\right] =$

0, полагая

$$F\left[x(\cdot), u(\cdot)\right] := \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ g\left[x(0), x(T)\right] \end{pmatrix},$$

где функция $y : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ определена соотношением $y(t) := \dot{x}(t) - f\left[x(t), u(t), t\right]$ $\forall t \in [0,T]$.

Считая функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ непрерывными, легко убедиться, что приведенная формула определяет отображение из $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{U}_\partial$ в банахово пространство $\boldsymbol{Y} := L_1\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right) \times \mathbb{R}^k$. Неравенства из (1.9) запишем в виде $G_1\left[x(\cdot), u(\cdot)\right] \le 0, \ldots, G_s\left[x(\cdot), u(\cdot)\right] \le 0$, вводя отображения $G_i : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{U}_\partial \to \mathbb{R}$ формулой

$$G_i\left[x(\cdot), u(\cdot)\right] := r_i\left[x(0), x(T)\right].$$

Наконец, считая функции $\varphi(\cdot)$ и $\eta(\cdot)$ непрерывными, замечаем, что формула (1.10) определяет отображение $\Phi : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{U}_\partial \to \mathbb{R}$

$$\Phi\left[x(\cdot), u(\cdot)\right] := \int_0^T \varphi\left[x(t), u(t), t\right]\, dt + \eta\left[x(0), x(T)\right].$$

В итоге становится ясно, что задача (1.7)-(1.10) – частный случай следующей абстрактной задачи:

минимизировать функционал $\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ *в области* $\boldsymbol{D}$, *выделяемой из множества* $\Theta \times \boldsymbol{U}_\partial$ *уравнением* $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0$ *и неравенствами* $G_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \le 0, \ldots, G_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \le 0$. (1.11)

Здесь $\Theta \subset \boldsymbol{X}$ – открытое подмножество банахова пространства $\boldsymbol{X}$ (для задачи (1.7) - (1.10), $\Theta := \boldsymbol{X}$), $\boldsymbol{U}_\partial$ – метрическое пространство, $F : \Theta \times \boldsymbol{U}_\partial \to \boldsymbol{Y}$, $G_1 : \Theta \times \boldsymbol{U}_\partial \to \mathbb{R}, \ldots, G_s : \Theta \times \boldsymbol{U}_\partial \to \mathbb{R}$, $\Phi : \Theta \times \boldsymbol{U}_\partial \to \mathbb{R}$ и $\boldsymbol{Y}$ – банахово пространство.

Оказывается, в форме (1.11) можно записать большинство задач оптимального управления. Более того, полученные в результате задачи вида (1.11) обладают некоторыми общими свойствами. Поэтому любые результаты, относящиеся к задаче (1.11) и опирающиеся на упомянутые свойства, немедленно переносятся на очень широкий класс разнообразных конкретных задач оптимального управления. Это, в частности, относится к излагаемым в следующем параграфе необходимым условиям оптимальности первого порядка в задаче (1.11).

§2. Абстрактный принцип максимума в задаче на экстремум с ограничениями в виде равенств и неравенств

Сначала на более строгом уровне ставим абстрактную задачу оптимального управления и обсуждаем связанные с ней понятия, а затем приводим формулировку теорем, указывающих необходимые условия оптимальности в этой задаче. (Доказательства этих теорем см. в [2, гл.2].)

2.1.Абстрактная задача оптимального управления с ограничениями в виде равенств. Очень многие задачи оптимального управления могут быть формализованы следующим образом:

$$\Phi(\boldsymbol{w}) \to \min, \quad \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{D} := \{\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W} : F(\boldsymbol{w}) = 0\}, \tag{2.1}$$

минимизировать скалярный функционал $\Phi(\boldsymbol{w}) \in \mathbb{R}$ *на множестве* $\boldsymbol{D}$, *выделяемом из "простого"множества* $\boldsymbol{W}$ *уравнением* $F(\boldsymbol{w}) = 0$. Здесь $\Phi : \boldsymbol{W} \to \mathbb{R}$ и $F : \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{Y}$, где $\boldsymbol{Y}$ – банахово пространство. "Простота"множества $\boldsymbol{W}$ в данном случае означает, что $\boldsymbol{W}$ – это произведение $\boldsymbol{W} = \Theta \times \boldsymbol{U}_\partial$ открытого подмножества $\boldsymbol{\Theta} \subset \boldsymbol{X}$ банахова пространства $\boldsymbol{X}$ и метрического пространства $\boldsymbol{U}_\partial$. Таким образом, элементы $\boldsymbol{w}$ – это пары $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, где $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_\partial$.

Элементы $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Theta}$ называем *состояниями*, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_\partial$ – *управлениями*, а пары $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ – *процессами*. Процессы $\boldsymbol{w}$, удовлетворяющие ограничению $F(\boldsymbol{w}) = 0$ из (2.1), назовем *допустимыми*. Иногда при применении излагаемой абстрактной теории к конкретным задачам $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$ будем называть не просто процессом, состоянием и управлением, а *абстрактным процессом, состоянием и управлением* соответственно. Это нужно, чтобы подчеркнуть их отличие от конкретных процессов, состояний и управлений, связанных с рассматриваемой конкретной задачей.

Задача (2.1) охватывает в том числе случай нескольких ограничений в виде равенства $F_1(\boldsymbol{w}) = 0, \ldots, F_q(\boldsymbol{w}) = 0$ (поэтому далее, ссылаясь на эту задачу, мы часто будем говорить о равенствах во множественном числе). Действительно, их всегда можно выразить единым уравнением $F(\boldsymbol{w}) = 0$ и, тем самым, привести к указанному в (2.1) виду. Для этого достаточно взять $F(\boldsymbol{w}) := [F_1(\boldsymbol{w}), \ldots, F_q(\boldsymbol{w})] \in \boldsymbol{Y} := := \boldsymbol{Y}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{Y}_q$.

Далее предполагаем, что функции $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ гладкие по переменной $\boldsymbol{x}$; строгая формулировка этого, а также других предположений о задаче приведены далее в разд.2.7.

2.2.Лагранжиан (для задачи с ограничениями в виде равенств).

Лагранжианом или *функцией Лагранжа* задачи (2.1) называется вещественная функция

$$L\left(\boldsymbol{w}|l^{*},\lambda_{0}\right) := l^{*}F(\boldsymbol{w}) + \lambda_{0}\Phi(\boldsymbol{w}) \tag{2.2}$$

процесса $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$, зависящая от параметров $l^{*} \in \boldsymbol{Y}^{*}$ и $\lambda_{0} \in \mathbb{R}$. Эти параметры носят название *множителей Лагранжа.* Если их значения ясны из контекста, функцию Лагранжа будем обозначать короче $L(\boldsymbol{w})$.

2.3. Допустимый набор множителей Лагранжа (для задачи с ограничениями в виде равенств) – это набор $(l^{*},\lambda_{0}) \in \boldsymbol{Y}^{*}\times\mathbb{R}$, удовлетворяющий соотношениям

$$\lambda_{0} \geq 0,\ \lambda_{0} + \|l^{*}\| > 0.$$

Второе из них означает, что хотя бы один множитель l^{*} или λ_{0} отличен от нуля.

2.4. Абстрактное сопряженное уравнение (для задачи с ограничениями в виде равенств). Пусть задан процесс $\boldsymbol{w}^{0} \in \boldsymbol{W}$. Уравнение относительно множителей Лагранжа

$$L'_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{w}^{0}\right) = 0 \tag{2.3}$$

назовем *абстрактным сопряженным уравнением.* Вспоминая определение (2.2) лагранжиана, запишем это уравнение подробнее

$$l^{*}F'_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{w}^{0}\right) + \lambda_{0}\Phi'_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{w}^{0}\right) = 0. \tag{2.4}$$

В результате становится ясно, что рассматривамое уравнение – линейное. Соответственно множество Υ его решений (l^{*},λ_{0}) является линейным пространством. Оно заведомо непусто, так как содержит по крайней мере одно, а именно нулевое решение $l^{*} = 0, \lambda_{0} = 0$. В общем случае других решений может не быть. Однако, как следует из излагаемых далее теорем, для оптимального процесса $\boldsymbol{w}^{0}$ абстрактное сопряженное уравнение обязательно имеет и ненулевое решение. (Сказанное верно при выполнении некоторых естественных предположений, о которых речь пойдет далее.)

2.5. Гамильтонов функционал. Ранее в разд.2.2 каждому набору множителей Лагранжа $(l^{*},\lambda_{0}) \in \boldsymbol{Y}^{*}\times\mathbb{R}$ была сопоставлена функция Лагранжа $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ переменных $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$. В свою очередь, исходя из такой функции, можно построить функционал $H(\boldsymbol{u}) := -L\left(\boldsymbol{x}^{0},\boldsymbol{u}\right)$ от $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_{\partial}$

$$\boxed{(l^{*},\lambda_{0})} \to \boxed{L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) := l^{*}F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \lambda_{0}\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})} \to \boxed{H(\boldsymbol{u}) := -L\left(\boldsymbol{x}^{0},\boldsymbol{u}\right)}. \tag{2.5}$$

Если при этом исходный набор множителей (l^*, λ_0) является решением абстрактного сопряженного уравнения (2.3), то полученный таким образом функционал $H(\cdot)$ назовем *гамильтоновым.* Другими словами, *гамильтоновым функционалом (задачи* (2.1) *в точке* $\boldsymbol{w}^0 = (\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0)$) назовем любой функционал $H(\cdot)$, который можно построить согласно (2.5), исходя из некоторого решения (l^*, λ_0) уравнения (2.3). Так как решение этого уравнения, вообще говоря, неединственно, гамильтоновых функционалов может быть много. Их совокупность обозначим символом $\mathbb{H}\,(\boldsymbol{w}^0)$.

Заметим, что операции, изображенные в (2.5) стрелками, линейны, и вспомним, что совокупность Υ всех решений (l^*, λ_0) уравнения (2.3) является линейным пространством. Тогда становится ясно, что $\mathbb{H}\,(\boldsymbol{w}^0)$ также является линейным пространством относительно естественных операций над функционалами $H(\cdot)$.

2.6. Ограниченность в обобщенном смысле. Напомним, что подмножество $\Lambda \subset \boldsymbol{U}$ линейного нормированного пространства $\boldsymbol{U}$ называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре конечного радиуса r,т.е. $\Lambda \subset \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U} : |\boldsymbol{u}| \le r\}$. Совокупность $\mathfrak{L}$ всех ограниченных множеств, очевидно, является идеалом в следующем смысле.

Определение 2.1. *Непустая совокупность* $\mathfrak{L}$ *подмножеств* $\Lambda \subset \boldsymbol{U}$ *некоторого множества* $\boldsymbol{U}$ *называется идеалом, если она наряду с любой парой множеств* $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathfrak{L}$ *содержит их объединение* $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \in \mathfrak{L}$ *и наряду с любым множеством* $\Lambda \in \mathfrak{L}$ *содержит все его подмножества* $\Lambda' \subset \Lambda \in \mathfrak{L} \Rightarrow \Lambda' \in \mathfrak{L}$.

В дальнейшем нам потребуется обобщенное, аксиоматическое понятие ограниченного подмножества произвольного множества $\boldsymbol{U}$. Мы будем вводить такое понятие простым перечислением всех подмножеств, которые считаем ограниченными. При этом требуем, чтобы совокупность всех "ограниченных"подмножеств обязательно была идеалом.

Итак считаем, что для множества $\boldsymbol{U}$ определено аксиоматическое понятие ограниченного подмножества, если задан некоторый идеал $\mathfrak{L}$ подмножеств $\Lambda \subset \boldsymbol{U}$. Его элементы $\Lambda \in \mathfrak{L}$ будем называть $\mathfrak{L}$-*ограниченными множествами*, опуская приставку "$\mathfrak{L}$, если идеал ясен из контекста. Для линейного нормированного пространства $\boldsymbol{U}$, если не оговорено противное, всегда имеем в виду идеал, состоящий из всех ограниченных в обычном смысле подмножеств $\Lambda \subset \boldsymbol{U}$.

Легко убедиться, что в каждом из следующих примеров $\mathfrak{L}$ является идеалом подмножеств множества $\boldsymbol{U}$.

1) $\boldsymbol{U}$ – некоторое множество, $\mathfrak{L}$ – совокупность всех его подмножеств.

2) $\boldsymbol{U}$ – некоторое множество, $\mathfrak{L}$ – совокупность всех его конечных подмножеств.

3) $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{U}$ – некоторые множества, $\mathfrak{L}$ – совокупность подмножеств $\Lambda \subset \boldsymbol{U}$, содержащихся $\Lambda \subset \boldsymbol{W}$ в $\boldsymbol{W}$.

4) $\boldsymbol{U}$ – линейное пространство, $\mathfrak{L}$ – состоит из всех подмножеств $\Lambda \subset \boldsymbol{U}$ с конечномерной линейной оболочкой (т.е. наименьшим линейным подпространством, содержащим Λ).

5) $\boldsymbol{U} := L_p\left([t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n\right)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $\mathfrak{L}$ состоит из всех подмножеств $\Lambda \subset \boldsymbol{U}$, ограниченных относительно L_∞-нормы, т.е.

$$\mathfrak{L} :=:= \left\{ \Lambda \subset \boldsymbol{U} : \sup_{u(\cdot) \in \Lambda} |u(\cdot)|_\infty < \infty \right\}.$$

6) Распространение предыдущего примера на случай пространства кусочно-непрерывных функций:

$$\boldsymbol{U} := PC\left([t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n\right), \quad \mathfrak{L} := \left\{ \Lambda \subset \boldsymbol{U} : \sup_{u(\cdot) \in \Lambda} |u(\cdot)|_\infty < \infty \right\}.$$

Еще один пример идеала будет рассмотрен далее в разд.2.10.

2.7. Предположения об абстрактной задаче оптимального управления. Излагаемые далее в разд.2.9, 2.11 и 2.16 необходимые условия оптимальности верны лишь при определенных предположениях. Эти предположения будут приведены в двух вариантах, расположенных в порядке возрастания общности. Первый, более простой, вариант является основным и излагается в данном разделе. Второй, более общий, вариант предположений будет изложен в разд.2.10. Он предназначен для применения в специальных случаях. В основном, это приложения к задачам, в постановке которых некоторые моменты времени, во-первых, играют особую роль (к ним, например, относится момент окончания эволюции объекта), и, во-вторых, принимают разные значения для разных допустимых процессов.

Напомним, что в задаче (2.1) $\boldsymbol{w}$ – это пары $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, где $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_\partial$. Пусть задан некоторый процесс $\boldsymbol{w}^0 = (\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0)$.

Условие I. *Все функции, фигурирующие в задаче, заданы при* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Theta}$ *и* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_\partial$, *где* $\boldsymbol{\Theta} \subset \boldsymbol{X}$ *– открытое подмножество банахова пространства*

$\boldsymbol{X}$, а $\boldsymbol{U}_\partial$ – метрическое пространство, снабженное идеалом $\mathfrak{L} \subset 2^{\boldsymbol{U}_\partial}$. Функция $F(\boldsymbol{w})$, задающая ограничения в виде равенства $F(\boldsymbol{w}) = 0$, принимает значения в банаховом пространстве $\boldsymbol{Y}$.

В задаче (2.1), очевидно, фигурируют две функции $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ и $\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$. Именно о них идет речь в приведенном предположении о задаче (2.1), а также в следующих двух условиях.

Первое из них в общих чертах сводится к требованию дифференцируемости упомянутых функций по $\boldsymbol{x}$ и непрерывности производных в точке $\boldsymbol{w}^0$.

Условие II. *Любая функция $P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, фигурирующая в задаче, имеет производную Гато $P'_x(\boldsymbol{w})$ по $\boldsymbol{x}$ в произвольной точке $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$. Эта производная непрерывна по $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ в следующем смысле:*

$$\left\| P'_x(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) - P'_x(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0) \right\| \to 0 \quad \text{при} \quad \left| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 \right| \to 0,\ \boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}^0,\ \boldsymbol{u} \in \Lambda \tag{2.6}$$

для любого $\mathfrak{L}$-ограниченного множества $\Lambda \subset \boldsymbol{U}_\partial$.

Здесь и далее $\| \cdot \|$ – операторная норма, запись $\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}^0,\ \boldsymbol{u} \in \Lambda$ означает, что $\boldsymbol{u}$ стремится к $\boldsymbol{u}^0$, оставаясь в множестве Λ. Так как в задаче (2.1) фигурируют функции F и Φ, то для нее условие II следует проверить как при $P := F$, так и при $P := \Phi$. То же относится и к следующему предположению. Вкратце оно сводится к требованию липшицевости упомянутых функций по $\boldsymbol{u}$.

Условие III. *Для любого $\mathfrak{L}$-ограниченного множества $\Lambda \in \mathfrak{L}$ и при произвольном фиксированном $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Theta}$ любая из фигурирующих в задаче функций $P(\cdot)$ липшицева по $\boldsymbol{u} \in \Lambda$*

$$|P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_1) - P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_2)| \le c_{x,\Lambda} d\,(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \quad \forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \Lambda. \tag{2.7}$$

Здесь $d(\cdot, \cdot)$ – метрика пространства $\boldsymbol{U}_\partial$ и константа $c_{x,\Lambda}$ может зависеть от $\boldsymbol{x}$ и Λ (но не от $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$).

Условие IV. *Образ $Im\ F'_x(\boldsymbol{w}^0)$ оператора $F'_x(\boldsymbol{w}^0)$ замкнут и имеет конечную коразмерность.*

Известно, что подпространство $L \subset \boldsymbol{Y}$ и, в частности, $L := \mathrm{Im}\ F'_x(\boldsymbol{w}^0)$ замкнуто и имеет конечную коразмерность тогда и только тогда, когда его можно представить как множество всех решений некоторой конечной системы линейных уравнений

$$a_1^* \delta \boldsymbol{y} = 0, \ldots, a_q^* \delta \boldsymbol{y} = 0, \tag{2.8}$$

где $a_i^* \in \boldsymbol{Y}^*$ – непрерывные линейные функционалы. С другой стороны, образ $\operatorname{Im} F_x'(\boldsymbol{w}^0)$ – это совокупнсоть всех значений $\delta\boldsymbol{y}$ правой части уравнения

$$F_x'\left(\boldsymbol{w}^0\right)\delta\boldsymbol{x} = \delta\boldsymbol{y}, \tag{2.9}$$

при которых оно разрешимо относительно $\delta\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$. В итоге условие IV можно сформулировать иначе: *накладываемые на* $\delta\boldsymbol{y}$ *условия разрешимости уравнения* (2.9) *относительно* $\delta\boldsymbol{x}$ *можно выразить конечной системой линейных уравнений* (2.8). В таком случае говорят, что уравнение (2.9) имеет конечное число условий разрешимости.

Напомним, что символом PC обозначено пространство кусочно-непрерывных функций, а mes – мера Лебега. Следующее условие описывает пространство $\boldsymbol{U}_\partial$, а также метрику в нем.

Условие V. *Можно указать такой конечный интервал* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *вещественной оси, а также такое число* $m = 1, 2, , \ldots$ *и непустое множество* $\Omega = \Omega(t) \subset \mathbb{R}^m$*, зависящее, вообще говоря, от переменной* $t \in \Delta$*, что либо*

а) $\boldsymbol{U}_\partial := \{u(\cdot) \in PC\,(\Delta \to \mathbb{R}^m) : u(t) \in \Omega(t)\ \forall t \in \Delta\}$*, либо*

б) $\boldsymbol{U}_\partial := \{u(\cdot) \in L_\infty\,(\Delta \to \mathbb{R}^m) : u(t) \in \Omega(t)$ *для почти всех* $t \in \Delta\}$.

В обоих случаях метрика $d(\cdot,\cdot)$ *пространства* $\boldsymbol{U}_\partial$ *определяется одинаково*

$$d\,[u_1(\cdot), u_2(\cdot)] := \operatorname{mes}\ \{t : u_1(t) \neq u_2(t)\}\,. \tag{2.10}$$

Убедимся, что функция (2.10) является метрикой. Равенство $d\,[u_1(\cdot), u_2(\cdot)] = d\,[u_2(\cdot), u_1(\cdot)]$ очевидно. Свойство $d\,[u_1(\cdot), u_2(\cdot)] = 0 \Leftrightarrow u_1(\cdot) \equiv u_2(\cdot)$ в случае **б)** также очевидно, а в случае **а)** следует из соглашения о нормировке функций $u(\cdot) \in PC$. (Напомним, что они считаются непрерывными слева в любой точке, за исключением левого конца t_0 интервала Δ, и непрерывными справа в точке t_0.) Наконец, обозначая

$$E\,[u_1(\cdot), u_2(\cdot)] := \{t : u_1(t) \neq u_2(t)\}\,,$$

для любых $u_1(\cdot), u_2(\cdot), u_3(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$, очевидно, имеем

$$E\,[u_1(\cdot), u_3(\cdot)] \subset E\,[u_1(\cdot), u_2(\cdot)] \cup E\,[u_2(\cdot), u_3(\cdot)]\,.$$

Отсюда и из (2.10) немедленно следует справедливость последней метрической аксиомы: $d\,[u_1(\cdot), u_3(\cdot)] \leq d\,[u_1(\cdot), u_2(\cdot)] + d\,[u_2(\cdot), u_3(\cdot)]$.

Следующее условие описывает идеал в пространстве $\boldsymbol{U}_\partial$.

Условие VI. *Идеал* $\mathfrak{L} \subset 2^{\boldsymbol{U}_\partial}$ *состоит из всех подмножеств* $\Lambda \subset 2^{\boldsymbol{U}_\partial}$, *ограниченных относительно* L_∞*-нормы*

$$\mathfrak{L} := \left\{ \Lambda \subset \boldsymbol{U}_\partial : \sup_{u(\cdot)\in\Lambda} |u(\cdot)|_\infty < \infty \right\}. \tag{2.11}$$

Если множества $\Omega(t)$ ограничены в совокупности (т.е. ограничено их объединение $\cup_{t\in[0,T]}\Omega(t)$), то идеал (2.11), очевидно, совпадает с совокупностью всех подмножеств множества $\boldsymbol{U}_\partial$. В этом случае соотношения (2.6) и (2.7) достаточно проверить лишь при $\Lambda := \boldsymbol{U}_\partial$.

Условие VII. *Любой гамильтонов функционал* $H(\cdot) \in \mathsf{IHI}\,(\boldsymbol{w}^0)$ *представим в виде суммы константы и интеграла*

$$H\,[u(\cdot)] = \ \boldsymbol{c}\ + \int_\Delta \mathfrak{H}\ [t, u(t)]\ dt \quad \forall u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial. \tag{2.12}$$

Здесь $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ *и функция* $\mathfrak{H}\,(t, u)$ *переменных* $t \in \Delta$ *и* $u \in \Omega(t)$ *такова, что композиция* $\phi(t) := \mathfrak{H}\ [t, u(t)]$ *измерима и суммируема по* $t \in \Delta$ *для любого управления* $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$.

В (2.12) число $\boldsymbol{c}$ и функция $\mathfrak{H}\,(\cdot,\cdot)$ могут зависеть от $H(\cdot) \in \mathsf{IHI}\,(\boldsymbol{w}^0)$, но, разумеется, не должны зависеть от $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$.

2.8. Комментарий к условиям II и III из разд.2.7. Условие III, напомним, требует, чтобы фигурирующие в задаче функции были липшицевы по управлению $\boldsymbol{u}$ на любом $\mathfrak{L}$-ограниченном множестве $\Lambda \subset \boldsymbol{U}_\partial$. Это свойство в общем случае более слабое, чем липшицевость на всем пространстве $\boldsymbol{U}_\partial$ и может иметь место даже для функций, разрывных в любой точке $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_\partial$ (см. пример в конце раздела). Аналогично оговариваемая условием II непрерывность в предположении, что $\boldsymbol{u}$ стремится к $\boldsymbol{u}^0$, не покидая некоторого $\mathfrak{L}$-ограниченного множества, – свойство более слабое чем непрерывность при условии, что $\boldsymbol{u}$ стремится к $\boldsymbol{u}^0$ в обычном смысле.

Таким образом, идеал и связанное с ним понятие $\mathfrak{L}$-ограниченного множества – это способ выявить и использовать свойства липшицевости или непрерывности функций, которые липшицевыми или непрерывными в обычном смысле не являются. Включение таких функций в рассмотрение позволяет расширить круг приложений общей теории.

Пример. $\boldsymbol{U}_\partial := L_\infty\,([0,1] \to \mathbb{R})$, метрика $d(\cdot,\cdot)$ в $\boldsymbol{U}_\partial$ определена согласно (2.10), а идеал $\mathfrak{L}$ – согласно (2.11). Рассмотрим функцию $\mathcal{F} : \boldsymbol{U}_\partial \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}\,[u(\cdot)] := \int_0^1 |u(t)|^2\, dt.$$

Покажем, что она **1)** *разрывна в любой точке* $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$, но, тем не менее, **2)** *липшицева на любом* $\mathfrak{L}$*-ограниченном подмножестве* $\Lambda \subset \boldsymbol{U}_\partial$.

1) Выберем $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$ и для $n = 1, 2, \ldots$ обозначим

$$u_n(t) := \begin{cases} \quad n \quad , & \text{если } 0 \le t \le n^{-1}, \\ \; u(t) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно $u_n(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$ и

$$d\left[u_n(\cdot), u(\cdot)\right] \le n^{-1} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Вместе с тем

$$\mathcal{F}\left[u_n(\cdot)\right] = \int_0^{n^{-1}} n^2 \, dt + \int_{n^{-1}}^1 |u(t)|^2 \, dt = n + \int_{n^{-1}}^1 |u(t)|^2 \, dt \to \infty \quad n \to \infty.$$

Итак, $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$, но $\mathcal{F}\left[u_n(\cdot)\right] \to \infty \ne \mathcal{F}\left[u(\cdot)\right]$ при $n \to \infty$, т.е. функция $\mathcal{F}(\cdot)$ разрывна в точке $u(\cdot)$.

2) Пусть $\Lambda \in \mathfrak{L}$. Согласно (2.11) $u(\cdot) \in \Lambda \Rightarrow |u(\cdot)|_\infty \le c < \infty$, где константа c не зависит от $u(\cdot) \in \Lambda$. Для любых $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \Lambda$, обозначая $E := \{t : u_1(t) \ne u_2(t)\}$ и опираясь на (2.10), имеем

$$|\mathcal{F}\left[u_1(\cdot)\right] - \mathcal{F}\left[u_2(\cdot)\right]| = \left| \int_0^1 |u_1(t)|^2 \; dt - \int_0^1 |u_2(t)|^2 \; dt \right| =$$

$$= \left| \int_E \left(|u_1(t)|^2 - |u_2(t)|^2 \right) \; dt \right| \le 2 \int_E c^2 \, dt = 2c^2 \operatorname{mes} E = 2c^2 d\left[u_1(\cdot), u_2(\cdot)\right].$$

Таким образом, функция $\mathcal{F}(\cdot)$ липшицева на любом множестве $\Lambda \in \mathfrak{L}$.

2.9. Абстрактный принцип максимума для задачи с ограничениями в виде равенств (первый вариант). Процесс $\boldsymbol{w}^0$ назовем *оптимальным*, если он допустимый и является решением задачи (2.1), т.е. доставляет минимум функционалу $\Phi(\boldsymbol{w})$ на множестве всех допустимых процессов. (Напомним, что для задачи (2.1) допустимый процесс – это процесс, удовлетворяющий уравнению $F(\boldsymbol{w}) = 0$ из (2.1).) Процесс $\boldsymbol{w}^0$ назовем *локально оптимальным*, если он допустимый и доставляет минимум функционалу $\Phi(\boldsymbol{w})$ среди всех допустимых процессов, достаточно близких к $\boldsymbol{w}^0$, т.е. в некоторой своей окрестности.

Следующая теорема указывает необходимые условия оптимальности в исследуемой задаче (2.1).

Теорема 2.1. *Пусть* $\boldsymbol{w}^0 = (\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0)$ *– локально оптимальный процесс в задаче* (2.1)

$$\Phi(\boldsymbol{w}) \to \min, \quad \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{D} := \{\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W} : F(\boldsymbol{w}) = 0\}$$

и выполнены условия I-VII, сформулированные ранее в разд. 2.7.

Тогда существует такой допустимый набор множителей Лагранжа $(l^*, \lambda_0) \in \boldsymbol{Y}^* \times \mathbb{R}$*, что выполнено абстрактное сопряженное уравнение*

$$L'_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{w}^0\right) = 0 \tag{2.13}$$

и соотношение

$$H\left(\boldsymbol{u}^0\right) = \max_{u \in \boldsymbol{U}_\partial} H(\boldsymbol{u}). \tag{2.14}$$

В (2.13) *и* (2.14) $L(\boldsymbol{w})$ *и* $H(\cdot)$ *– соответственно лагранжиан и гамильтонов функционал, отвечающие рассматриваемым множителям Лагранжа.*

Соотношение (2.14) носит название *абстрактного принципа максимума.* Напомним, что набор множителей Лагранжа l^*, λ_0 называется допустимым, если $\lambda_0 \geq 0, \|l^*\| + \lambda_0 > 0$.

2.10. Второй вариант предположений об абстрактной задаче оптимального управления. Он предназначен для применения в специальных случаях: в основном, к задачам, в постановке которых фигурируют "нефиксированные"моменты времени. Этот вариант обобщает предположения, сформулированные ранее в разд. 2.7. Точнее, условия I,IV,V и VII из разд.2.7 не меняются, а условия II,III и VI заменяются излагаемыми далее условиями II',III' и VI' соответственно. В отношении условий II и III обобщение состоит в локализации области, где требуется их выполнение, до некоторой окрестности процесса $\boldsymbol{w}^0$. Условие VI обобщается за счет расширения набора используемых идеалов.

Условие II'. *Для произвольного множества* $\Lambda \in \mathfrak{L}$ *все фигурирующие в задаче функции имеют производную Гато по* $\boldsymbol{x}$ *в любой точке* $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ *с* $\boldsymbol{u} \in \Lambda$*, которая достаточно близка к* $\boldsymbol{w}^0$ *(в смысле неравенств* $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0| < \delta_\Lambda, d\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^0\right) < \delta_\Lambda$*, где число* $\delta_\Lambda > 0$ *может быть малым). Эти производные непрерывно зависят от* $\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{u} \in \Lambda$ *в точке* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^0$*, т.е. верно* (2.6).

Условие III'. *Для произвольного множества* $\Lambda \in \mathfrak{L}$ *все функции, фигурирующие в задаче, при произвольном фиксированном* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Theta}$*, достаточно близком к* $\boldsymbol{x}^0$ *(в смысле неравенства* $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0| < \delta_\Lambda$*, где число* $\delta_\Lambda > 0$ *может быть малым), липшицевы по* $\boldsymbol{u} \in \Lambda$*, т.е. верно* (2.7).

В условиях II' и III' число δ_Λ, вообще говоря, зависит от Λ.

Напомним, что в задаче (2.1) фигурируют функции $F(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$.

Далее считаем, что выполнено условие V из разд. 2.7. Напомним, что в соответствии с ним элементы $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_\partial$ – это функции $u : \Delta \to \mathbb{R}^m$, где Δ –

конечный интервал вещественной оси.

Условие VI'. *Идеал* $\mathfrak{L}$ *определен, исходя из некоторой функции* $u^0(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$ *и некоторого конечного (возможно пустого) набора точек* $\{\tau_i\}_{i=1}^q \subset \Delta$*, а именно он состоит из всех подмножеств* $\Lambda \subset \boldsymbol{U}_\partial$ *со следующими свойствами:*

i) *множество* Λ *ограничено относительно* L_∞*-нормы, т.е.* $\sup_{u(\cdot)\in\Lambda} |u(\cdot)|_\infty < \infty$ *и*

ii) *каждая точка* τ_i *рассматриваемого набора имеет окрестность* $O_i = \Delta \cap (\tau_i - \epsilon_i, \tau_i + \epsilon_i)$ *(где* $\epsilon_i > 0$*), в которой все функции* $u(\cdot) \in \Lambda$ *совпадают с* $u^0(\cdot)$

$$\int_{O_i} \left|u(t) - u^0(t)\right| \, dt = 0 \quad \forall u(\cdot) \in \Lambda, \; i = 1, \ldots, q.$$

В случае пустого набора $\{\tau_i\}_{i=1}^q$ требование ii), очевидно, исчезает и условие VI' переходит в условие VI из разд. 2.7.

2.11. Абстрактный принцип максимума для задачи с ограничениями в виде равенств (второй вариант). Следующая теорема констатирует, что теорема 2.1 из разд. 2.9 остается в силе, если ее условия обобщить, как указано в предыдущем разделе.

Теорема 2.2. *Пусть* $\boldsymbol{w}^0 = (\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0)$ *– локально оптимальный процесс в задаче* (2.1)

$$\Phi(\boldsymbol{w}) \to \min, \quad \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{D} := \{\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W} : F(\boldsymbol{w}) = 0\}$$

и выполнены условия I,IV, V и VII, сформулированные в разд. 2.7*, а также условия II',III' и VI' из разд.* 2.10*.*

Тогда существует такой допустимый набор множителей Лагранжа $(l^*, \lambda_0) \in \boldsymbol{Y}^* \times \mathbb{R}$*, что выполнено абстрактное сопряженное уравнение*

$$L'_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{w}^0\right) = 0 \tag{2.15}$$

и абстрактный принцип максимума

$$H\left(\boldsymbol{u}^0\right) = \max_{u \in \boldsymbol{U}_\partial} H(\boldsymbol{u}). \tag{2.16}$$

В (2.15) *и* (2.16) $L(\boldsymbol{w})$ *и* $H(\cdot)$ *– соответственно лагранжиан и гамильтонов функционал, отвечающие рассматриваемым множителям Лагранжа.*

2.12. Абстрактная задача оптимального управления с ограничениями в виде равенств и неравенств. Перейдем к более общей задаче

$$\begin{gathered}\Phi(\boldsymbol{w}) \to \min, \quad \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{D} := \\ := \{\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W} : F(\boldsymbol{w}) = 0, G_1(\boldsymbol{w}) \le 0, \ldots, G_s(\boldsymbol{w}) \le 0\}.\end{gathered} \tag{2.17}$$

Здесь, как и ранее, $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_\partial$, а $F(\boldsymbol{w}) \in \boldsymbol{Y}, \Phi(\boldsymbol{w}) \in \mathbb{R}$, $G_1(\boldsymbol{w}) \in \mathbb{R}, \ldots, G_s(\boldsymbol{w}) \in \mathbb{R}$ – заданные функции переменной $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W} := \boldsymbol{\Theta} \times \boldsymbol{U}_\partial$. Таким образом, множество $\boldsymbol{D}$, на котором ищем минимум, описывается не только уравнением, но и конечной системой скалярных неравенств. Соответственно для задачи (2.17) *допустимым* назовем процесс $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$, удовлетворяющий не только уравнению $F(\boldsymbol{w}) = 0$, но и всем указанным неравенствам $G_1(\boldsymbol{w}) \le 0, \ldots, G_s(\boldsymbol{w}) \le 0$.

В остальном ситуация прежняя. При этом на функции $G_1(\cdot), \ldots, G_s(\cdot)$ накладываем те же требования, что и на функцию $\Phi(\cdot)$. Оказывается, что тогда для задачи (2.17) остаются в силе теоремы 2.1 и 2.2, если надлежащим образом обобщить некоторые из фигурирующих в них понятий. Этим обобщениям посвящены следующие три раздела. Затем мы явно сформулируем относящийся к задаче (2.17) аналог теорем 2.1 и 2.2.

Далее предполагаем, что в задаче (2.17) могут отсутствовать либо ограничения в виде равенства $F(\boldsymbol{w}) = 0$, либо ограничения в виде неравенств $G_1(\boldsymbol{w}) \le 0, \ldots, G_s(\boldsymbol{w}) \le 0$ (тогда вновь имеем дело с задачей (2.1)), либо те и другие.

2.13. Лагранжиан (для задачи с ограничениями в виде равенств и неравенств). Сопоставим равенству $F(\boldsymbol{w}) = 0$ из (2.17) линейный функционал $l^* \in \boldsymbol{Y}^*$, каждому неравенству $G_1(\boldsymbol{w}) \le 0$ – число $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и, наконец, минимизируемому функционалу $\Phi(\cdot)$ – число λ_0. *Лагранжианом* или *функцией Лагранжа* задачи (2.17) называется вещественная функция

$$L\left(\boldsymbol{w}|l^*, \lambda\right) := l^* F(\boldsymbol{w}) + \lambda_1 G_1(\boldsymbol{w}) + \ldots + \lambda_s G_s(\boldsymbol{w}) + \lambda_0 \Phi(\boldsymbol{w}) \tag{2.18}$$

процесса $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$, зависящая от параметров $l^* \in \boldsymbol{Y}^*$ и $\lambda := (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in \mathbb{R}^{s+1}$. Если ограничения $F(\boldsymbol{w}) = 0$ в задаче нет, лагранжианом называется функция

$$L\left(\boldsymbol{w}|l^*, \lambda\right) := \lambda_1 G_1(\boldsymbol{w}) + \ldots + \lambda_s G_s(\boldsymbol{w}) + \lambda_0 \Phi(\boldsymbol{w}). \tag{2.19}$$

Если нет ограничений в виде неравенств $G_1(\boldsymbol{w}) \le 0, \ldots, G_s(\boldsymbol{w}) \le 0$, лагранжиан определяется согласно (2.2). Для задачи без ограничений $\Phi(\boldsymbol{w}) \to \min, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$ лагранжианом называют функцию $\lambda_0 \Phi(\boldsymbol{w})$.

Параметры, от которых зависит функция Лагранжа, т.е. параметры l^*, λ_0, …, λ_s (или l^*, λ_0, если в задаче нет ограничений в виде неравенств, и т.д.) называют *множителями Лагранжа.* Если их значения ясны из контекста, функцию Лагранжа обозначаем короче $L(\boldsymbol{w})$.

2.14. Абстрактное сопряженное уравнение и гамильтоновы функционалы (для задачи с ограничениями в виде равенств и неравенств). Абстрактное сопряженное уравнение записывается точно так же, как в уже рассмотренном случае задачи без неравенств: $L_x'(\boldsymbol{w}^0) = 0$. Здесь неизвестными по-прежнему являются множители Лагранжа, однако их число уже иное, чем для задачи без неравенств. Так же, как в разд. 2.3, устанавливаем, что рассматриваемое уравнение линейно. В частности, оно имеет по крайней мере одно решение, а именно нулевое (все множители Лагранжа равны нулю). В предположениях излагаемой далее теоремы 2.3 пространство Υ всех решений этого уравнения конечномерно.

С точность до трактовки понятия множителей Лагранжа определение гамильтонова функционала не претерпевает никаких изменений. По-прежнему *гамильтонов функционал – это любой функционал* $H(\cdot)$, *который может быть получен исходя из некоторого решения абстрактного сопряженного уравнения следующим образом. Строим отвечающий этому решению лагранжиан* $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ *и рассматриваем функционал* $H(\boldsymbol{u}) := -L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u})$. Совокупность всех гамильтоновых функционалов, как и ранее, обозначаем символом $\mathbb{H}(\boldsymbol{w}^0)$.

2.15. Допустимый набор множителей Лагранжа (для задачи с ограничениями в виде равенств и неравенств). *Допустимым* называют набор $l^*, \lambda_0, \ldots, \lambda_s$, удовлетворяющий соотношениям

$$\lambda_0 \geq 0, \ldots, \lambda_s \geq 0, \tag{2.20}$$

$$\lambda_0 + \ldots + \lambda_s + \|l^*\| > 0, \tag{2.21}$$

$$\lambda_1 G_1(\boldsymbol{w}^0) = 0, \ldots, \lambda_s G_s(\boldsymbol{w}^0) = 0. \tag{2.22}$$

Здесь неравенство (2.21) иногда называют *условием невырожденности.* Оно означает, что в наборе множителей Лагранжа есть хотя бы один ненулевой множитель. Равенства (2.22) часто называют *условиями дополняющей нежесткости.* Они указывают, что любому неравенству $G_i(\boldsymbol{w}) \leq 0$ из (2.17), которое в исследуемой точке $\boldsymbol{w}^0$ выполнено строго $G_i(\boldsymbol{w}^0) < 0$, отвечает нулевой множитель $\lambda_i = 0$.

Для задачи без ограничения в виде равенства, либо без ограничений в виде неравенств при определении допустимого набора множителей Лагранжа в (2.20)- (2.22) следует опустить отсутствующие в данном случае компоненты набора множителей, а также соответствующие слагаемые и условия.

Например, если в задаче нет ограничений в виде равенства $F(\boldsymbol{w}) = 0$, то отсутствует компонента l^*: набор множителей Лагранжа состоит из чисел $\lambda_0, \ldots, \lambda_s$. Тогда допустимым будет набор, удовлетворяющий соотношениям (2.20), (2.22) и неравенству $\lambda_0 + \ldots + \lambda_s > 0$, которое получается из (2.21) удалением лишнего слагаемого $\|l^*\|$. Если в задаче нет ограничений в виде неравенств, то, рассуждая аналогично, получаем определение допустимого набора из разд. 2.3. Наконец, для задачи без ограничений допустимый набор состоит из одного множителя $\lambda_0 > 0$.

2.16. Абстрактный принцип максимума (для задачи с ограничениями в виде равенств и неравенств). Приводимые далее необходимые условия оптимальности аналогичны необходимым условиям для случая, когда неравенства отсутствуют (см. теоремы 2.1 и 2.2). При этом нужно лишь лагранжиан и допустимый набор множителей Лагранжа определить так, как было указано в предыдущих трех разделах.

Теорема 2.3. *Пусть процесс* $\boldsymbol{w}^0 = (\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0)$ *локально оптимален в задаче* (2.17)

$$\Phi(\boldsymbol{w}) \to \min, \quad \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{D} := \{\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W} : F(\boldsymbol{w}) = 0, G_1(\boldsymbol{w}) \leq 0, \ldots, G_s(\boldsymbol{w}) \leq 0\}$$

и выполнены условия I,IV,V и VII из разд. 2.7, *а также условия II, III и VI из этого раздела, либо условия II',III' и VI' из разд.* 2.10.

Тогда существует такой допустимый набор множителей Лагранжа, что выполнено абстрактное сопряженное уравнение

$$L'_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{w}^0\right) = 0 \tag{2.23}$$

и абстрактный принцип максимума

$$H\left(\boldsymbol{u}^0\right) = \max_{u \in \boldsymbol{U}_\partial} H(\boldsymbol{u}). \tag{2.24}$$

В (2.23) $L(\boldsymbol{w})$ *– лагранжиан, отвечающий рассматриваемым множителям Лагранжа, а в* (2.24) $H(\cdot) := -L\left(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}\right)$ *- соответствующий гамильтонов функционал.*

Сформулированная теорема верна и для задач, в которых отсутствуют либо все ограничения, либо ограничения в виде равенства, либо ограничения в виде неравенств. (В последнем случае она переходит в конъюнкцию теорем 2.1 и 2.2.)

§3. Общая схема применения абстрактного принципа максимума

Изложенная общая теория непосредственно относится к абстрактным задачам (2.1) и (2.17), сформулированным на языке функционального анализа. Однако предназначена она для вывода условий оптимальности в конкретных задачах, т.е. в задачах, сформулированных на языке более специальных областей математики: теории обыкновенных дифференциальных или интегральных уравнений, теории уравнений в частных производных и т.д. Обсудим технологию перехода от "абстрактного"к "конкретному т.е. перехода от абстрактного принципа максимума к необходимому условия оптимальности в конкретной задаче. Начнем с примера такой задачи.

3.1. Постановка задачи оптимального управления. Возвратимся к задаче из разд.1.1, предполагая, для простоты, что ограничения в виде неравенств отсутствуют и функции $f(\cdot), \varphi(\cdot)$ не зависят от времени t

$$\dot{x}(t) = f\left[x(t), u(t)\right], \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.1}$$

$$g\left[x(0), x(T)\right] = 0_{\mathbb{R}^k}, \tag{3.2}$$

$$u(t) \in \Omega \quad \forall t \in [0, T], \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{I} := \int_0^T \varphi\left[x(t), u(t)\right]\, dt + \eta\left[x(0), x(T)\right] \to \min. \tag{3.4}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – управление, функции $f(x,u) \in \mathbb{R}^n$, $g\left(x_0, x_1\right) \in \mathbb{R}^k$, $\varphi(x,u) \in \mathbb{R}$, $\eta\left(x_0, x_1\right) \in \mathbb{R}$, а также множество $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ и момент времени $T > 0$ заданы.

Соотношения (3.1)-(3.4) означают, что задача состоит в поиске пары функций $x(\cdot), u(\cdot)$, заданных на интервале $[0, T]$ и принимающих значения в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Поиск ведется среди всех пар, удовлетворяющих соотношениям (3.1)-(3.3), причем ищется пара, доставляющая минимальное значение функционалу (3.4).

Такая постановка задачи соответствует "инженерному"уровню строгости. Однако ее нельзя признать математически строгой. Действительно, пока не указано, какие функции $x(\cdot)$ и $u(\cdot)$ рассматриваются – непрерывные или разрывные, гладкие или нет и т.д. Открыт вопрос о корректности соотношений (3.1)- (3.4) (например, о существовании интеграла в (3.4)). Ответ на него зависит, помимо прочего, от функций $\varphi(\cdot), \eta(\cdot)$ и т.д., точнее, от их свойств, которые также пока не оговорены. Таким образом, сами по себе соотношения (3.1)-(3.4) еще не составляют постановки задачи и нуждаются в дополнениях.

Математику, работающему в прикладных областях, часто приходится вносить их самостоятельно. Сделать это, как правило, несложно, так как в теории оптимального управления сложились стандартные принципы, однозначно предопределяющие требуемые дополнения. Этот стандарт ориентирован на наиболее распространенную ситуацию и, в то же время, отражает возможности теории; отклонения от него обычно специально оговаривают на "инженерном"уровне постановки задачи. Упомянутые принципы служат основой следующей программы действий, направленных на доведение постановки задачи до математического уровня строгости. По сути, они составляют первый этап решения задачи.

Математически строгая постановка задачи оптимального управления,

т.е. точное описание множества, на котором ищется оптимум, а также оптимизируемого функционала, с учетом предваряющих мероприятий, сводится к выполнению следующих действий

1. Формулируем предположения об исходных данных задачи, т.е. о тех числах, множествах, функциях и т.п., заданием которых определяется исследуемая задача. (Для задачи (3.1)-(3.4) – это число T, множество Ω и функции f, g, φ, η.)

РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАМЕЧАНИЯ

Множество допустимых значений вектора управляющих переменных (для задачи (3.1)-(3.4) – это множество Ω) *считаем произвольным подмножеством пространства значений этого вектора.*	*Все функции из числа исходных данных задачи считаем заданными для любых значений вектора состояния и для значений вектора управлений из замыкания множества, рассмотренного в предыдущем пункте.*	*Считаем, что эти функции имеют первые производные по переменным состояния и непрерывны вместе с этими производными по совокупности переменных.*

2. Состояние и управление рассматриваем как функции времени (более общо, той переменной, от которой они зависят).

Решаем вопрос об аналитических свойствах состояния и управления,

т.е. должны ли эти функции быть непрерывными или разрывными, гладкими или нет и т.п.

РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАМЕЧАНИЯ

Управления считаем либо **а)** *кусочно- непрерывными, либо* **б)** *измеримыми и существенно ограниченными (т.е. из L_∞). Выбор варианта оставляется исследователю.*

Предположения о состоянии должны гарантировать корректность всех соотношений в постановке задачи.

Следует ограничиться минимальными требованиями к состоянию.

3. Описываем множество D, на котором ищется оптимум

РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАМЕЧАНИЯ

Элементы этого множества – наборы объектов (функций, векторов, чисел и т.п.), по которым ищется оптимум и соответственно поиск оптимальных вариантов которых составляет содержание рассматриваемой задачи. Множество D составлено из тех и только тех наборов, для которых, во-первых, состояние и управление обладают свойствами, оговоренными при выполнении предыдущего пункта, и которые, во-вторых, удовлетворяют соотношениям, перечисленным в постановке задачи (исключая, разумеется, то, которое задает оптимизируемый функционал).

Выписав определение множества D, полезно задуматься над его корректностью, т.е. проанализировать, осмыслены ли соотношения из постановки задачи в предположениях, сделанных при выполнении пунктов 1 и 2.

4. Описываем оптимизируемый функционал $\mathfrak{I}$

РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАМЕЧАНИЯ

Формула, задающая этот функционал, всегда присутствует в постановке задачи. Поэтому данный пункт сводится к проверке корректности этой формулы в предположениях, сделанных при выполнении пунктов 1 и 2.

5. После описания множества D и функционала $\mathfrak{J}$ любая задача оптимального управления записывается стандартно
$$\mathfrak{J}(w) \to \min, \quad w \in D$$

6. Вводим обозначения для оптимального процесса и его компонент.

$\overbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$

РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАМЕЧАНИЯ

Это действие объясняется тем, что цель предпринимаемого исследования – вывод необходимых условий *оптимальности процесса*. Соответственно следует сразу указать, какой процесс мы собираемся охарактеризовать такими условиями.

Применим сформулированные правила к задаче (3.1)-(3.4).

1. Считаем, что в (3.1)-(3.4) $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – произвольное непустое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, функции $f(x,u) \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x,u) \in \mathbb{R}$ заданы при $x \in \mathbb{R}^n, u \in \overline{\Omega}$, имеют первые производные по x и непрерывны вместе с ними по $x \in \mathbb{R}^n, u \in \overline{\Omega}$, функции $g(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^k$, $\eta(x_0, x_1) \in \mathbb{R}$ заданы при $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ и непрерывно дифференцируемы.

2. Управление $u(\cdot)$ считаем кусочно-непрерывной функцией. Обдумывая требования к состоянию $x(\cdot)$, замечаем, что уравнение (3.1) дифференциальное. Поэтому функцию $x(\cdot)$ следует считать гладкой. Так как в правой части этого уравнения функция $u(\cdot)$ разрывна, производная $\dot{x}(\cdot)$ также может иметь разрывы. В итоге ясно, что мы должны предположить наличие у функции $x(\cdot)$ первой, вообще говоря, разрывной производной. Вспоминая рекомендацию ограничиться минимальными требованиями к состоянию (не выходя, естественно, за пределы разумных, т.е. не впадая в крайности, ведущие к нетрадиционным и излишне усложненным трактовкам имеющихся соотношений), будем считать функцию $x(\cdot)$ абсолютно непрерывной. Это гарантирует корректность всех выражений в (3.1)-(3.4), непосредственно связанных с функцией $x(\cdot)$, т.е. выражений $\dot{x}(t), x(t), x(0), x(T)$.

3. Минимум в задаче (3.1)-(3.4) ищем на множестве

$$\boldsymbol{D} := \{[x(\cdot), u(\cdot)] : x(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^n \text{ – абсолютно непрерывная функция, } u(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^m \text{ – кусочно-непрерывная функция и выполнены соотношения (3.1)-(3.3) }\}. \tag{3.5}$$

При этом требуем, чтобы равенство (3.1) выполнялось для почти всех точек интервала $[0, T]$.

Так как функция $f(x, u)$ определена при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $u \in \overline{\Omega}$, а в силу (3.2) $u(t) \in \Omega$, выражение $f[x(t), u(t)]$ из (3.1) корректно. Это, а также оговоренная дифференцируемость функции $x(\cdot)$ гарантирует корректность уравнения (3.1), понимаемого, как указано в комментарии к формуле (3.5). Так как функция $g(\cdot)$ определена всюду, а функция $x(\cdot)$ – при $t \in [0, T]$, выражение $g[x(0), x(T)]$ из (3.3) также корректно. Значит, корректно и само равенство (3.3).

4. Формула (3.4) корректно определяет функционал $\mathfrak{I} : \boldsymbol{D} \to \mathbb{R}$. Действительно, пусть $[x(\cdot), u(\cdot)] \in \boldsymbol{D}$. Так как функция $\varphi(x, u)$ задана при всех $x \in \mathbb{R}^n, u \in \overline{\Omega}$, а, согласно (3.5) и (3.2), $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \Omega$, то подынтегральное выражение $\varphi[x(t), u(t)]$ из (3.4) корректно. В нем, напомним, функции $\varphi(\cdot)$ и $x(\cdot)$ непрерывны, а $u(\cdot)$ кусочно-непрерывна. Значит, это выражение определяет кусочно-непрерывную функцию времени, что гарантирует корректность интеграла в (3.4). Так как функция $\eta(x_0, x_1)$ определена при всех $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, а $x(\cdot)$ – при $t \in [0, T]$, выражение $\eta[x(0), x(T)]$ из (3.4) также осмыслено. В итоге убеждаемся, что формула (3.4) корректна в целом.

5. Задача состоит в минимизации функционала $\mathfrak{I}$, определяемого формулой (3.4), на множестве (3.5)

$$\mathfrak{I}(\boldsymbol{w}) \to \min, \quad \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{D}.$$

6. Пусть $[x^0(\cdot), u^0(\cdot)]$ – оптимальный процесс в этой задаче.

3.2. Этапы применения абстрактной теории. Итак, задача поставлена и мы переходим непосредственно к выводу необходимых условий оптимальности процесса $[x^0(\cdot), u^0(\cdot)]$. Такие условия, относящиеся, однако, к другой, а именно абстрактной задаче (2.1) (или (2.17)), мы уже имеем. Поэтому естественна идея представить исследуемую конкретную задачу в виде частного случая одной из указанных абстрактных задач и затем воспользоваться готовым результатом. Такое представление достигается за счет специального выбора пространств ($\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}_\partial$ и т.д.) и функций ($F(\cdot)$ и т.д.), определяющих абстрактную задачу, и носит название *формализации* (конкретной задачи). Проделав формализацию, необходимо убедиться, что полученная в результате задача (2.1) (или (2.17)) удовлетворяет предположениям какой-либо из сформулированных в §2 теорем. В случае успеха можно воспользоваться этой теоремой и записать соответствующие необходимые условия оптимальности. Фигурирующие в них объекты – функция F, пространства $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}_\partial$ и т.д. – на этапе формализации были выбраны в конкретном виде. Другими словами, функция $F(\cdot)$ была определена конкретной формулой, в качестве $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{U}_\partial$ были выбраны конкретные пространства и т.д. Поэтому естественно переписать абстрактные необходимые условия с учетом этой конкретики, т.е. подставить в них формулы для функций $F(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ и т.д., конкретизировать "устройство"функционала $l^* \in \boldsymbol{Y}^*$ с учетом сделанного выбора пространства $\boldsymbol{Y}$ и т.п. Может оказаться, что после внесения этой конкретики необходимые условия можно упростить, и это, несомненно, следует сделать. Запись абстрактных необходимых условий оптимальности с учетом конкретного вида фигурирующих в них функций и пространств, а также последующее упрощение этих условий (если возможно) составляет содержание *расшифровки* абстрактных необходимых условий оптимальности. Подведем итог.

Применение абстрактной теории для вывода необходимых условий оптимальности в конкретной задаче

Формализация,
т.е. запись исследуемой конкретной задачи в виде частного случая абстрактной задачи (2.1) или (2.17) за счет специального выбора объектов, определяющих абстрактную задачу. К ним относятся пространства $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}_\partial, \boldsymbol{Y}$, множество Θ и функции $F(\cdot), \Phi(\cdot)$ (и $G_i(\cdot)$ – для задачи (2.17)).

$\downarrow$

Проверка условий
одной из теорем о необходимых условиях оптимальности в абстрактной задаче.

$\longrightarrow$

Расшифровка
абстрактных необходимых условий оптимальности, т.е. их запись с учетом внесенной на этапе формализации конкретики и, если возможно, упрощение.

3.3. Формализация. Обычно совсем не сложно найти (и даже не один) способ, позволяющий формально записать исследуемую конкретную задачу в нужном виде, т.е. в виде частного случая абстрактной задачи (2.1) или (2.17). Однако нас интересует не любой такой способ, а только тот, который гарантирует справедливость предположений хотя бы одной теоремы о необходимых условиях оптимальности в абстрактной задаче. Это соображение, как выясняется, существенно ограничивает произвол в выборе способа формализации. Для нахождения правильного способа полезно придерживаться излагаемого далее плана. Он сочетает эвристические решения 1-4 с точными определениями объектов, задающих абстрактную задачу.

Отметим, что этот план ориентирован на наиболее распространенную, типичную ситуацию. Поэтому в отдельных случаях могут возникать нюансы, не учитываемые этим планом. Однако даже в таких случаях он предлагает целесообразную последовательность действий и базовые решения, составляющие стержень формализации.

Формализация,

т.е. запись исследуемой конкретной задачи в виде частного случая абстрактной задачи (2.1) или (2.17) за счет специального выбора объектов, определяющих абстрактную задачу. К ним относятся пространства $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}_\partial, \boldsymbol{Y}$, множество Θ и функции $F(\cdot), \Phi(\cdot)$ (и $G_i(\cdot)$ – для задачи (2.17)).

1. Решаем вопрос о "природе"процесса w,

т.е. решаем, что это такое: число или вектор, или функция, или набор, состоящий из числа и функции, и т.п.

РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАМЕЧАНИЯ

Процесс $\boldsymbol{w}$ – это обычно набор тех объектов, по которым ищется оптимум и поиск оптимальных вариантов которых составляет содержание рассматриваемой конкретной задачи.

Например, задача (3.1)-(3.4) заключается в поиске пары функций $[x(\cdot), u(\cdot)]$. Поэтому для нее $\boldsymbol{w} := [x(\cdot), u(\cdot)]$, где $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ и $u : [0, T] \to \mathbb{R}^m$.

2. Учитывая, что в абстрактных задачах (2.1) и (2.17) процесс $\boldsymbol{w}$ – это пара $\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}]$, решаем, как разделить w на x и u

РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАМЕЧАНИЯ

За $\boldsymbol{u}$ принимаем управляющую функцию. Если таких функций несколько $u_1(t) \in \mathbb{R}^{m_1}, \ldots, u_p(t) \in \mathbb{R}^{m_p}$, предварительно объединяем их в одну $u(t) := [u_1(t), \ldots, u_p(t)] \in \mathbb{R}^m$, где $m := m_1 + \ldots + m_p$. Если они заданы на разных интервалах $u_i : \Delta_i \to \mathbb{R}^{m_i}$ $(i = 1, \ldots, p)$, предварительно формально продолжаем их на один общий интервал $\Delta := \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_p$

$\boldsymbol{x}$ – это все то, что остается в наборе $\boldsymbol{w}$ после удаления из него компонент, отнесенных к $\boldsymbol{u}$.

Например, для задачи (3.1)-(3.4) $\mathbf{u} := u(\cdot)$, а так как $\boldsymbol{w} = [x(\cdot), u(\cdot)]$, то $\mathbf{x} := x(\cdot)$. Итак, элементы $\mathbf{u} \in \boldsymbol{U}_\partial$ – это функции $u : [0, T] \to \mathbb{R}^m$, а элементы $\mathbf{x} \in \boldsymbol{X}$ – это функции $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$.

3. Выписываем формулу, определяющую функцию $F(\cdot)$.
Анализ корректности этой формулы составляет содержание п.8.

РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАМЕЧАНИЯ

Функцию $F(\cdot)$ нужно выбрать так, чтобы уравнение $F(\boldsymbol{w}) = 0$ было равносильно системе всех равенств, присутствующих в постановке задачи. Поэтому вначале выписываем все эти равенства столбиком друг под другом.

$\longrightarrow$

Преобразуем их к нормализованной форме, когда справа от знака равенства стоит нуль.

$\downarrow$

Выделяем все равенства, содержащие квантор $\forall$, т.е. равенства вида

$$\text{выражение}\,(q) = 0 \quad \forall q,$$

где q – некоторая переменная. Каждое такое равенство переписываем, следуя образцу

$$z(\cdot) \equiv 0, \ \text{где}$$
$$z(q) := \text{выражение}\,(q) \quad \forall q,$$

переводя таким образом квантор из самого равенства в комментарий к нему.

$\longleftarrow$

В полученном столбце соотношений знаки равенства и стоящие справа от них нули убираем, а выражения, стоявшие слева от знака равенства, объединяем в упорядоченный набор. Этот набор и является значением $F(\boldsymbol{w})$. Комментарии, возникшие при выполнении предыдущего пункта, сохраняем. Они приобретают статус комментариев к формуле для $F(\boldsymbol{w})$, без которых она бессмысленна.

Реализуем эту программу применительно к задаче (3.1)-(3.4).

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = f\,[x(t), u(t)] \ \ \forall t, \\ g\,[x(0), x(T)] = 0 \end{cases}} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) - f\,[x(t), u(t)] = 0 \ \forall t, \\ g\,[x(0), x(T)] = 0 \end{cases}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{cases} \dot{x}(t) - f\,[x(t), u(t)] = 0 \ \forall t \\ \hline g\,[x(0), x(T)] = 0 \end{cases} \\ \qquad\qquad\downarrow \\ \begin{cases} y(\cdot) \equiv 0, \ \text{где } y(t) := \dot{x}(t) - \\ \qquad\qquad - f\,[x(t), u(t)] \ \ \forall t \\ g\,[x(0), x(T)] = 0 \end{cases} \end{array}}$$

$$\longleftarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} F(\boldsymbol{w}) := \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ g\,[x(0), x(T)] \end{pmatrix} \\ \text{где} \\ y(t) := \dot{x}(t) - f\,[x(t), u(t)] \ \ \forall t \end{array}}$$

В итоге мы на самом деле так выбрали функцию $F(\cdot)$, что уравнение $F(\boldsymbol{w}) = 0$ равносильно системе всех равенств, присутствующих в постановке задачи. Действительно, по построению эта система совпадает с покомпонентной записью уравнения $F(\boldsymbol{w}) = 0$.

4. **Решаем вопрос о "природе"элементов $y \in Y$,** т.е. решаем, что это такое: число или вектор, или функция, или набор, состоящий из числа и функции, и т.п.

РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАМЕЧАНИЯ

Эта природа обусловлена формулой, задающей функцию $F(\cdot)$, так как по своему смыслу элементы $\boldsymbol{y}$ – это значения $F(\boldsymbol{w})$.

Например, для задачи (3.1)-(3.4)

$$F(\boldsymbol{w}) := \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ g\,[x(0), x(T)] \end{pmatrix}, \text{ где } y(t) := \dot{x}(t) - f\,[x(t), u(t)] \quad \forall t, \tag{3.6}$$

причем, $g\,(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^k$. Таким образом, значения $F(\boldsymbol{w})$, а, значит, и элементы $\mathbf{y} \in \boldsymbol{Y}$ – это пары $\mathbf{y} = [y(\cdot), y_0]$, где $y_0 \in \mathbb{R}^k$, а $y : [0, T] \to \mathbb{R}^n$.

5. $\boxed{\text{Определение пространства } U_\partial = \{u\}\text{, а также метрики и идеала в нем}}$

РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАМЕЧАНИЯ

Все возможные варианты пространства $\boldsymbol{U}_\partial$ описаны в условии V. Выбор варианта с очевидностью предопределен постановкой задачи.

Метрика пространства $\boldsymbol{U}_\partial$ определена формулой (2.10)

Возможные варианты идеала описаны в условиях VI и VI'. Основным является вариант из условия VI. Вариант, описанный в условии VI', применяется в специальных случаях. Он используется в основном при исследовании задач, в постановке которых некоторые моменты времени, во-первых, играют особую роль и, во-вторых, априори не заданы, т.е. принимают разные значения для разных процессов и подлежат определению в результате решения задачи оптимизации.

Обратимся для примера к задаче (3.1)-(3.4). Для нее $\mathbf{u} = u(\cdot)$ и по постановке задачи $u(\cdot)$ – кусочно-непрерывная функция времени $t \in [0, T]$ со значениями в множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Поэтому естественно выбрать вариант а) из условия V с $\Delta := [0, T]$

$$\boldsymbol{U}_\partial := \{u(\cdot) \in PC\,([0,T] \to \mathbb{R}^m) : u(t) \in \Omega \quad \forall t\}\,. \tag{3.7}$$

В силу условия V метрику в $\boldsymbol{U}_\partial$ следует задать соотношением (2.10)

$$d\,[u_1(\cdot), u_2(\cdot)] := \text{mes }\{t : u_1(t) \neq u_2(t)\}\,. \tag{3.8}$$

Рассмотрим также основной, т.е. описанный в условии VI, вариант идеала

$$\mathfrak{L} := \left\{\Lambda \subset \boldsymbol{U}_\partial : \sup_{u(\cdot)\in\Lambda} |u(\cdot)|_\infty < \infty\right\}. \tag{3.9}$$

6. Определение пространства $Y = \{y\}$

РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАМЕЧАНИЯ

Пространство Y должно быть банаховым.	Как показывает практика, неплохую гарантию правильности выбора пространства Y дает справедливость условия III (или условия III'), которые, напомним, требуют, чтобы функция F была липшицева. Наличие этого свойство можно проверить уже на данном этапе формализации, так как формула, задающая $F(\cdot)$, и метрика пространства $\boldsymbol{U}_\partial$ уже выбраны.
Значения функции $F(\cdot)$ должны принадлежать пространству Y.	
В качестве Y целесообразно выбирать, по-возможности, максимально широкое пространство.	

Возвратимся к задаче (3.1)-(3.4). Для нее, согласно п.4, $\mathbf{y} = [y(\cdot), y_0]$, где $y[0,T] \to \mathbb{R}^n$ и $y_0 \in \mathbb{R}^k$. Поэтому $\boldsymbol{Y}$ следует искать в виде $\boldsymbol{Y} := S \times \mathbb{R}^k$, где $S = \{y(\cdot)\}$ – подлежащее выбору функциональное пространство. Так как значения функции $F(\cdot)$ должны попадать в $\boldsymbol{Y}$, пространство S должно содержать функции $y(\cdot)$, получаемые по формуле (3.6), т.е. $y(\cdot) \in S$, где $y(t) = \dot{x}(t) - f[x(t), u(t)]$ $\forall t$. Здесь из постановки задачи функция $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, а $f(\cdot)$ – непрерывна. Следовательно, $y(\cdot) \in L_1$, причем, напомним, пространство S должно содержать $y(\cdot)$. Поэтому естественно взять $S := L_1([0,T] \to \mathbb{R}^n)$, тем более, что L_1 является банаховым пространством, как и следует. Итак,

$$\boldsymbol{Y} := L_1([0,T] \to \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k. \tag{3.10}$$

7. **Определение пространства $X = \{x\}$ и множества Θ**

РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАМЕЧАНИЯ

Пространство $\boldsymbol{X}$ должно быть банаховым.

В соответствии с п.1,2, элементы $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ – это наборы, составленные из объектов (не всех), по которым ищется минимум и поиск оптимальных вариантов которых составляет содержание исследуемой конкретной задачи. При ее постановке свойства таких объектов оговариваются. Пространство $\boldsymbol{X}$, разумеется, должно содержать все наборы $\boldsymbol{x}$, компоненты которых обладают оговоренными свойствами.

В качестве $\boldsymbol{X}$ целесообразно выбирать, по-возможности, максимально узкое пространство.

Обычно $\Theta = \boldsymbol{X}$. Иной выбор Θ связан с особыми ситуациями, возникающими, например, если в постановке задачи некоторые моменты времени, во-первых, играют особую роль, и, во-вторых, априори не заданы.

Справедливость условия IV дает, как показывает практика, неплохую гарантию правильности выбора пространства $\boldsymbol{X}$. Это условие можно проверить уже на данном этапе формализации, так как формула, задающая функцию $F(\boldsymbol{w})$, и пространства $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{U}_\partial$ уже выбраны.

Для задачи (3.1)-(3.4) $\mathbf{x} = x(\cdot)$, где, напомним, $x(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ – абсолютно непрерывная функция. Поэтому естественно взять

$$\Theta := \boldsymbol{X} := W\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right). \tag{3.11}$$

8. **Проверка корректности формулы, определяющей функцию $F(\cdot)$.**

Эта формула, напомним, выписана ранее в результате выполнения п.3.

РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАМЕЧАНИЯ

Следует выяснить, верно ли, что для любого $\boldsymbol{w} \in \Theta \times \boldsymbol{U}_\partial$ а) осмыслены все выражения и операции, приведенные в указанной формуле, и б) элемент, определяемый этой формулой, действительно принадлежит пространству $\boldsymbol{Y}$.

Обратимся к задаче (3.1)-(3.4). Для нее $\boldsymbol{w} = [x(\cdot), u(\cdot)] \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{U}_\partial$, где $\boldsymbol{X} := W([0,T] \to \mathbb{R}^n)$ и $\boldsymbol{U}_\partial = \{u(\cdot) \in PC([0,T] \to \mathbb{R}^m) : u(t) \in \Omega \ \forall t\}$, а значение $F(\boldsymbol{w})$ определено формулой (3.6), т.е.

$$F(\boldsymbol{w}) := \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ g\left[x(0), x(T)\right] \end{pmatrix}, \text{ где } y(t) := \dot{x}(t) - f\left[x(t), u(t)\right] \ \forall t.$$

Эта формула корректна. Действительно, так как функция $g(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^k$ определена при всех $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, а $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – при $t \in [0,T]$, выражение $g\left[x(0), x(T)\right] \in \mathbb{R}^k$ из (3.6) осмыслено. Так как функция $f(x,u) \in \mathbb{R}^n$ определена при всех $x \in \mathbb{R}^n, u \in \overline{\Omega}$, а функции $x(t)$ и $u(t) \in \Omega$ – при $t \in [0,T]$, то при любом $t \in [0,T]$ выражение $f\left[x(t), u(t)\right] \in \mathbb{R}^n$ из (3.6) также осмыслено. Определяемая им функция времени t кусочно-непрерывна ввиду непрерывности функций $f(\cdot)$ и $x(\cdot)$ и кусочной-непрерывности функции $u(\cdot)$. Производная $\dot{x}(\cdot)$, очевидно, существует и принадлежит $L_1([0,T] \to \mathbb{R}^n)$. Таким образом, все используемые формулой (3.6) выражения и операции осмыслены. Кроме того, $y(\cdot) := \dot{x}(\cdot) - f\left[x(\cdot), u(\cdot)\right] \in L_1([0,T] \to \mathbb{R}^n)$ и $g\left[x(0), x(T)\right] \in \mathbb{R}^k$, т.е. эта формула действительно определяет элемент пространства $\boldsymbol{Y} = L_1([0,T] \to \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^k$.

9. Определение функции $\Phi(w)$.

РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАМЕЧАНИЯ

Напомним, что $\Phi(\cdot)$ – это минимизируемый функционал (см. (2.1), (2.17)). Формула для минимизируемого функционала всегда присутствует в постановке исследуемой конкретной задачи. Этой формулой и следует воспользоваться для определения функции $\Phi(\cdot)$.	Выписав определение функции $\Phi(\cdot)$, следует убедиться в его корректности, т.е. следует удостовериться, что для любого $\boldsymbol{w} \in \Theta \times \boldsymbol{U}_\partial$ осмыслены все выражения и операции, используемые этим определением.

Обратимся к задаче (3.1)-(3.4). Она состоит в поиске минимума функционала (3.4). Поэтому отображение $\Phi : \boldsymbol{W} := \Theta \times \boldsymbol{U}_\partial \to \mathbb{R}$ следует определить формулой (3.4)

$$\Phi(\boldsymbol{w}) := \int_0^T \varphi\left[x(t), u(t)\right]\, dt + \eta\left[x(0), x(T)\right]. \tag{3.12}$$

Убедимся в корректности этого определения. Пусть $\boldsymbol{w} = [x(\cdot), u(\cdot)] \in \boldsymbol{W} = W([0,T] \to \mathbb{R}^n) \times \boldsymbol{U}_\partial$, где, напомним, $\boldsymbol{U}_\partial := \{u(\cdot) \in PC([0,T] \to \mathbb{R}^m) :$

$u(t) \in \Omega \forall t\}$. Так как функции $\varphi(x,u) \in \mathbb{R}$ и $\eta(x_0,x_1) \in \mathbb{R}$ определены при всех $x, x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, $u \in \overline{\Omega}$, а функции $x(t) \in \mathbb{R}^n$ и $u(t) \in \Omega$ – при $t \in [0,T]$, то в (3.12) выражения $\eta[x(0), x(T)]$ и $\varphi[x(t), u(t)]$ при любом $t \in [0,T]$ осмыслены. Ввиду непрерывности функций $\varphi(\cdot)$ и $x(\cdot)$ и кусочной-непрерывности функции $u(\cdot)$ подынтегральное выражение в (3.12) – кусочно-непрерывная функция времени t. Значит, интеграл в (3.12) также осмыслен и формула (3.12) корректна для любого $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$. Следовательно, она действительно определяет функционал $\Phi : \boldsymbol{W} \to \mathbb{R}$.

10. Только для задач с ограничениями в виде неравенств.

Определение функций $G_i : W := \Theta \times U_\partial \to R$.

Эти функции связаны с абстрактной задачей (2.17) и задают в ней ограничения в виде неравенств $G_1(\boldsymbol{w}) \leq 0, \ldots, G_s(\boldsymbol{w}) \leq 0$.

РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАМЕЧАНИЯ

Выписываем все ограничения, имеющие вид неравенств и присутствующие в постановке исследуемой конкретной задачи. $\longrightarrow$

Преобразуем каждое из них к виду **выражение** ≤ 0

$\downarrow$

Если среди неравенств есть векторные (т.е. неравенства вида **выражение** $\leq 0_{R^q}$, где левая часть принадлежит $\mathbb{R}^q$ и неравенство понимается покомпонентно), преобразуем каждое векторное неравенство в эквивалентную систему скалярных.

$\longleftarrow$

Каждое скалярное неравенство записываем в виде $G_i(\boldsymbol{w}) \leq 0$, определив $G_i(\boldsymbol{w})$ как левую часть этого неравенства.

$\downarrow$

Проверяем корректность сделанных определений.

В результате проделанных действий абстрактная задача вида (2.1) или (2.17) определена полностью.

11. Указываем оптимальный процесс в построенной абстрактной задаче.

Например, в результате формализации задачи (3.1)-(3.4) мы построили задачу вида (2.1): она определена соотношениями (3.6)-(3.12). В этой построенной нами задаче, очевидно, оптимален тот же процесс $\boldsymbol{w}^0 := [x^0(\cdot), u^0(\cdot)]$, что и в исходной конкретной задаче (3.1)-(3.4).

Мы уже отметили ранее, что изложенный план непосредственно ориентирован на наиболее распространенную ситуацию. Следуя ему, мы имеем хорошую гарантию того, что формализация будет проделана правильно. Однако эта гарантия не абсолютна. В отдельных случаях изложенный план может привести и к неприемлемой формализации. Обнаруживается это при проверке условий теоремы о необходимых условиях оптимальности в абстрактной задаче. В принципе, может нарушаться любое из условий. Однако одно из них, а именно условие VII, оговаривающее вид гамильтоновых функционалов, страдает от неправильной формализации, в известном смысле, чаще чем другие условия. Поэтому *в конце формализации имеет смысл провести прикидочную*, т.е. возможно не доведенную до уровня полной строгости *проверку условия VII*. Эта акция обычно очень проста и тем более уместна.

Что же делать, если формализация задачи оказалась неприемлемой. Исчерпывающий ответ на этот вопрос дать, по-видимому, невозможно. Поэтому ограничимся советами общего характера.

Полезно еще раз проанализировать выбор пространств $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{U}_\partial$, учитывая, в частности, сформулированные ранее рекомендации. Этот анализ особенно полезен при нарушении условия III (или его аналога – условия III'), либо условияIV, так как нарушение именно этих двух условий чаще всего удается преодолеть за счет правильного выбора указанных пространств. Если при неправильной формализации был использован идеал из условияVI, можно попробовать поправить дело за счет применения идеала из условияVI'. Довольно часто так удается справиться с нарушением условия II (которое, напомним, оговаривает дифференцируемость фигурирующих в абстрактной задаче функций по состоянию и непрерывность соответствующих производных). Вместе с тем иногда при нарушении условия II и почти всегда при нарушении условия VII (оговаривающего, напомним, вид гамильтоновых функционалов) дорога к правильной формализации лежит через эквивалентную переформулировку исследуемой конкретной задачи. При этом часто оказываются полезными следующие два приема. Во-первых, эквивалентное преобразование некоторых соотношений из постановки задачи на базе других таких соотношений. Пример подобного преобразования: в задаче (3.1)-(3.4) равенство $g\left[x(0), x(T)\right] = 0$ равносильно соотношению

$$g\left[x(0), x(0)\right] + \int_0^T \frac{\partial g}{\partial x_1}\left[x(0), x(t)\right] f\left[x(t), u(t)\right]\, dt = 0;$$

их эквивалентность следует из (3.1). Во-вторых, введение новых переменных (возможно, функциональных, т.е. принадлежащих функциональному пространству) для обозначения и соответственно замещения некоторых выражений в постановке задачи. Этим переменным придается статус объектов, поиск оптимальных вариантов которых составляет содержание задачи. В соответствии с п.1 они "вносятся"в набор $\boldsymbol{w}$ в качестве дополнительных компонент. Равенствам, указывающим, какие выражения обозначают новые переменные, придается статус ограничений задачи. Согласно п.4, это приводит к появлению дополнительных компонент в наборе $F(\boldsymbol{w})$.

В заключение подведем для удобства дальнейших ссылок итог формализации задачи (3.1)-(3.4).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &:= \left[x(\cdot), u(\cdot)\right], \; \mathbf{x} := x(\cdot) \in \Theta := \boldsymbol{X} := W\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right), \\ \mathbf{u} &:= u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial := \left\{u(\cdot) \in PC\left([0,T] \to \mathbb{R}^m\right) : u(t) \in \Omega \; \forall t\right\}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{Y} := L_1\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right) \times \mathbb{R}^k, \tag{3.14}$$

$$d\left[u_1(\cdot), u_2(\cdot)\right] := \text{mes}\; \left\{t : u_1(t) \neq u_2(t)\right\}, \tag{3.15}$$

$$\mathfrak{L} := \left\{\Lambda \subset \boldsymbol{U}_\partial : \sup_{u(\cdot)\in\Lambda} |u(\cdot)|_\infty < \infty\right\}, \tag{3.16}$$

$$F(\boldsymbol{w}) := \begin{bmatrix} y(\cdot) \\ y_0 \end{bmatrix}, \text{ где } \begin{array}{l} y(t) := \dot{x} - f\left[x(t), u(t)\right] \; \forall t \in [0.T], \\ y_0 := g\left[x(0), x(T)\right], \end{array} \tag{3.17}$$

$$\Phi(\boldsymbol{w}) := \int_0^T \varphi\left[x(t), u(t)\right]\, dt + \eta\left[x(0), x(T)\right]. \tag{3.18}$$

3.4. Проверка предположений одной из теорем о необходимых условиях оптимальности в абстрактной задаче. Здесь имеются в виду теоремы 2.1- 2.3 из §2. Они делают формально разные, но по смыслу родственные предположения о задаче. Такие родственные группы образуют, во-первых, условие II и условие II', во-вторых, условие III и условие III', и в-третьих, условие VI и условие VI'. Условия первой группы оговаривают дифференцируемость фигурирующих в задаче функций по состоянию и непрерывность соответствующих производных. Условия второй группы оговаривают липшицевость этих функций по управлению. Наконец, в условиях третьей группы описаны допустимые варианты идеала в пространстве $\boldsymbol{U}_\partial$. За исключением перечисленных условий (и того факта, что теорема2.3 относится к задаче с ограничениями типа равенств и неравенств, а теоремы 2.1 и 2.2 – к задачам без неравенств) предположения теорем 2.1-2.3 одинаковы.

В данном разделе мы обсудим общие принципы, на которых обычно строится проверка условий этих теорем. Мы также напомним несколько результатов математического и функционального анализа, весьма полезных при этой проверке. Так как для родственных условий упомянутые принципы и результаты одинаковы, мы не будем рассматривать такие условия раздельно.

Проверка условия I. Это общее для всех теорем 2.1-2.3 условие оговаривает свойства пространств $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{U}_\partial$ и множества Θ. Именно, $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ – банаховы пространства, $\boldsymbol{U}_\partial$ – метрическое пространство, снабженное идеалом, и $\Theta \subset \boldsymbol{X}$ – открытое подмножество пространства $\boldsymbol{X}$. Проверка обсуждаемого условия обычно элементарна. При этом в части, касающейся пространства $\boldsymbol{U}_\partial$, его выполнение гарантировано принятым планом формализации. В части, касающейся пространств $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, обоснование этого условия обычно сводится к ссылке на известные факты функционального анализа.

Например, для задачи (3.1)-(3.4) справедливость условия I немедленно следует из беглого обзора формализации (3.13)-(3.18) этой задачи. Действительно, пространство $\boldsymbol{U}_\partial$, как и следует, снабжено метрикой (3.15) и идеалом (3.16). Определенное в (3.13) пространство $\boldsymbol{X} := W\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right)$, как хорошо известно, банахово. Пространство $\boldsymbol{Y}$ также банахово как произведение (3.14) банаховых пространств $L_1\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right)$ и $\mathbb{R}^k$. Наконец, множество $\Theta := \boldsymbol{X}$, очевидно, открыто.

Проверка условия дифференцируемости фигурирующих в задаче функций по состоянию и непрерывности производных. Здесь имеется в виду условие II, а также условие II'. В соответствии с их содержанием проверка складывается из двух последовательных действий.

Проверка условия II (или условия II')	$\Leftarrow$	Обоснование дифференцируемости фигурирующих в абстрактной задаче функций по состоянию $\boldsymbol{x}$.	&	Доказательство непрерывности соответствующих производных в точке $\boldsymbol{w}^0$.

Обоснование дифференцируемости. Пусть $P(\cdot)$ – какая-то из функций, фигурирующих в абстрактной задаче. Нужно показать, что она имеет частную производную Гато $P'_x\,(x_*, u_*)$ по состоянию $\mathbf{x}$ в любой точке (x_*, u_*) из числа оговоренных условием II (или условием II'). Здесь часто полезны следующие правила.

Основные правила исчисления частных производных Гато.

Рассматриваем линейные нормированные пространства $\mathcal{X} = \{x\}, \mathcal{Y} = \{y\}, \mathcal{Y}_i = \{y_i\}, \mathcal{Z} = \{z\}$, метрическое пространство $\boldsymbol{U}_\partial = \{u\}$, открытые подмножества $\mathcal{O}_{x,u} \subset \mathcal{X} \times \boldsymbol{U}_\partial$, $\mathcal{O}_y \subset \mathcal{Y}$ и точку $(x_*, u_*) \in \mathcal{O}_{x,u}$.

$\mathfrak{A}$. *Если функции $P, Q : \mathcal{O}_{x,u} \to \mathcal{Y}$ в точке (x_*, u_*) имеют производные Гато по $\boldsymbol{x}$, то их линейная комбинация $N(\cdot) := c_P P(\cdot) + c_Q\, Q(\cdot)$ также имеет производную Гато по $\boldsymbol{x}$ в этой точке, причем*

$$N'_x\,(x_*, u_*) = c_P P'_x\,(x_*, u_*) + c_Q\; Q'_x\,(x_*, u_*)\,. \tag{3.19}$$

$\mathfrak{B}$. *Если функция $P : \mathcal{O}_{x,u} \to \mathcal{Y}$ в точке (x_*, u_*) имеет производную Гато по $\boldsymbol{x}$, то ее сужение $\widetilde{P} := P|_{\mathcal{O}}$ на любое содержащее эту точку открытое подмножество $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{x,u}$, также имеет производную Гато по $\boldsymbol{x}$, причем $\widetilde{P}'_x\,(x_*, u_*) = P'_x\,(x_*, u_*)$.*

$\mathfrak{C}$. *Из дифференцирумости по Фреше функции $P : \mathcal{O}_{x,u} \to \mathcal{Y}$ по $\boldsymbol{x}$ в точке (x_*, u_*) следует ее дифференцируемость по Гато по $\boldsymbol{x}$ в этой точке, причем соответствующие производные равны.*

$\mathfrak{D}$. *Блочное отображение $P : \mathcal{O}_{x,u} \to \mathcal{Y}$, т.е. отображение вида $P(x, u) = [P_1(x, u), \ldots, P_q(x, u)] \in \mathcal{Y} := \mathcal{Y}_1 \times \cdots \times \mathcal{Y}_q$, где $P_i : \mathcal{O}_{x,u} \to \mathcal{Y}_i$, имеет производную Гато по $\boldsymbol{x}$ в точке (x_*, u_*) в том и только том случае, когда такую производную имеют все ее блоки $P_i(\cdot)$, причем*

$$P'_x\,(x_*, u_*)\, h = \left[P'_{1,x}\,(x_*, u_*)\, h, \ldots, P'_{q,x}\,(x_*, u_*)\, h\right] \quad \forall h \in \mathcal{X}. \tag{3.20}$$

$\mathfrak{E}$. *Композиция $N := Q \circ P$ двух отображений $P : \mathcal{O}_{x,u} \to \mathcal{Y}$ и $Q : \mathcal{O}_y \to \mathcal{Z}$ имеет производную Гато по $\boldsymbol{x}$ в точке (x_*, u_*) всякий раз, когда отображение $Q(\cdot)$ имеет производную Фреше в точке $y_* := P\,(x_*, u_*)$, а отображение $P(\cdot)$ – производную Гато по $\boldsymbol{x}$ в точке (x_*, u_*). При этом*

$$N'_x\,(x_*, u_*) = Q'\,(y_*)\, P'_x\,(x_*, u_*)\,. \tag{3.21}$$

Сформулированные правила сводят вопрос о дифференцируемости одного отображения к вопросу о дифференцируемости другого (или других). Поэтому они лишь упрощают ситуацию, но окончательного ответа не дают. Как следствие, рано или поздно приходится опираться на какие-то другие соображения. В частности, довольно часто полезны следующие два простых факта.

$\mathfrak{F}$. *Отображение $P(x,u) := Ax + y_0$, где $x \in \mathcal{X}$ и $u \in \boldsymbol{U}_\partial$ – переменные, вектор $y_0 \in \mathcal{Y}$ задан и $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ – непрерывный линейный оператор, имеет производную Фреше по $\boldsymbol{x}$ в любой точке $(x_*, u_*) \in \mathcal{X} \times \boldsymbol{U}_\partial$, причем $P'_x(x_*, u_*) = A$.*

$\mathfrak{G}$. *Если заданная на открытом подмножестве $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^p$ функция $Q : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^q$ в точке $a \in \mathcal{O}$ имеет первый дифференциал, то она дифференцируема в этой точке по Фреше, причем соответствующая производная $Q'(a)$ – это оператор умножения вектора $h \in \mathbb{R}^p$ на матрицу Якоби $yak\, Q(a)$, т.е. $Q'(a)h = yak\, Q(a) \times h$.*

Последний факт часто используют в комбинации с правилом $\mathfrak{E}$.

Оба утверждения $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ имеют дело с очень специальными функциями. Поэтому в интересующих нас приложениях они в лучшем случае лишь частично решают проблему. Для ее полного решения часто приходится обращаться непосредственно к определению производной Гато по $\boldsymbol{x}$. В соответствии с ним проверка дифференцируемости по Гато функции $P : \mathcal{O}_{x,u} \to \mathcal{Y}$ в точке (x_*, u_*) состоит из двух действий. Во-первых, следует обосновать существование производной по любому направлению $h \in \mathcal{X}$, т.е. предела

$$\delta P\,(x_*, u_*|h) := \lim_{\alpha \to +0} \frac{P\,(x_* + \alpha h, u_*) - P\,(x_*, u_*)}{\alpha}.$$

Легко заметить, что этот предел – не что иное, как производная $\mathfrak{P}'(0)$ функции $\mathfrak{P}\,(\alpha) := P\,(x_* + \alpha h, u_*) \in \mathcal{Y}$ вещественной переменной $\alpha \geq 0$ в точке $\alpha = 0$. Во-вторых, нужно убедиться, что упомянутая производная $\delta P\,(x_*, u_*|h)$ зависит от направления h линейно и непрерывно. Итак,

Доказательство дифференцируемости по Гато функции $P : \mathcal{O}_{x,u} \to \mathcal{Y}$ в точке (x_*, u_*) путем непосредственной проверки определения этой производной.

$$\Uparrow$$

Для любого $h \in \mathcal{X}$ рассматриваем функцию $\mathfrak{P}(\alpha) := P(x_* + \alpha h, u_*) \in \mathcal{Y}$ вещественной переменной $\alpha \geq 0$. Доказываем, что эта функция дифференцируема в точке $\alpha = 0$, т.е. существует предел $\mathfrak{P}'(0) := \lim\limits_{\alpha \to +0} \dfrac{\mathfrak{P}(\alpha) - \mathfrak{P}(0)}{\alpha} =: \delta P(x_*, u_*\|h)$	Устанавливаем, что производная $\delta P(x_*, u_*\|h)$ зависит от направления h линейно и непрерывно.

Если линейность производной $\delta P(x_*, u_*|h)$ по $h \in \mathcal{X}$ уже обоснована, то ее непрерывность по h, как хорошо известно, равносильна оценке

$$|\delta P(x_*, u_*|h)| \leq c|h|, \tag{3.22}$$

где вектор h произволен и константа $c < \infty$ от него не зависит.

При выполнении первого из указанных на схеме двух действий часто полезны следующие леммы. Они предлагают критерии дифференцируемости функции вещественной переменной со значениями в некоторых наиболее употребительных функциональных пространствах.

Лемма 3.1 (о дифференцировании функции со значениями в C). *Пусть $\Delta = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}, \alpha_0 > 0$ и функция $\pi : \Delta \times [0, \alpha_0] \to \mathbb{R}^p$ переменных $t \in \Delta$ и $\alpha \in [0, \alpha_0]$ в любой точке $(t, \alpha) \in \Delta \times [0, \alpha_0]$ имеет частную производную $\partial\pi(t, \alpha)/\partial\alpha$ по α и непрерывна вместе с нею по совокупности переменных. Определим отображение $\mathfrak{P} : [0, \alpha_0] \to \mathcal{Y} := C(\Delta \to \mathbb{R}^p)$, полагая $\mathfrak{P}(\alpha) := y(\cdot)$, где $y(t) := \pi(t, \alpha)$ для всех $t \in \Delta$.*

Отображение $\mathfrak{P} : [0, \alpha_0] \to \mathcal{Y}$ имеет производную $\mathfrak{P}'(\alpha)$ в любой точке $\alpha \in [0, \alpha_0]$, причем

$$\mathfrak{P}'(\alpha) = \delta y(\cdot), \quad \text{где} \quad \delta y(t) := \frac{\partial\pi}{\partial\alpha}(t, \alpha) \quad \forall t \in \Delta. \tag{3.23}$$

Поясним заключение леммы. Оно утверждает, что в любой точке $\widetilde{\alpha} \in [0, \alpha_0]$ существует определяемая согласно (3.23) производная $\mathfrak{P}'(\widetilde{\alpha})$, т.е. предел $\lim_{\alpha \to \widetilde{\alpha}} (\alpha - \widetilde{\alpha})^{-1} [\mathfrak{P}(\alpha) - \mathfrak{P}(\widetilde{\alpha})]$ в норме пространства $\mathcal{Y}$. Сходимость по этой норме – это равномерная сходимость на интервале Δ. Поэтому, вспоминая определение $\mathfrak{P}(\cdot)$, заключение леммы можно переписать так

$$(\alpha-\widetilde{\alpha})^{-1}\left[\pi(t,\alpha)-\pi\left(t,\widetilde{\alpha}\right)\right] \rightrightarrows \frac{\partial \pi}{\partial \alpha}(t,\widetilde{\alpha}) \text{ при } \alpha \to \widetilde{\alpha} \text{ равномерно по } t \in \Delta.$$

Заметим, что в условиях леммы непосредственно предполагалось, что эта сходимость имеет место лишь при каждом t, т.е. поточечно.

Лемма 3.2 (о дифференцировании функции со значенями в L_q). *Пусть $\Delta=[t_0,t_1]\subset\mathbb{R},\alpha_0>0$ и $q\in[1,\infty)$. Рассмотрим функцию $\pi:\Delta\times[0,\alpha_0]\to\mathbb{R}^p$ переменных $t\in\Delta$ и $\alpha\in[0,\alpha_0]$ со следующими свойствами.*

$\mathfrak{a}$. *При любом $\alpha\in[0,\alpha_0]$ функция $\pi(\cdot,\alpha)$ измерима по Лебегу на отрезке Δ.*

$\mathfrak{b}$. *Для почти всех $t\in\Delta$ функция $\pi(t,\cdot)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,\alpha_0]$.*

$\mathfrak{c}$. *$\pi(\cdot,\alpha)\in L_q\left(\Delta\to\mathbb{R}^p\right)$ при некотором $\alpha\in[0,\alpha_0]$.*

$\mathfrak{d}$. *Существует неотрицательная функция $\mu(\cdot)\in L_q\left(\Delta\to\mathbb{R}\right)$, мажорирующая производную $\partial\pi/\partial\alpha$, т.е.*

$$\left|\frac{\partial \pi}{\partial \alpha}(t,\alpha)\right| \le \mu(t) \text{ для почти всех } t\in\Delta \text{ и всех } \alpha\in[0,\alpha_0]\,. \tag{3.24}$$

Тогда $\pi(\cdot,\alpha)\in\mathcal{Y}:=L_q\left(\Delta\to\mathbb{R}^p\right)$ для всех $\alpha\in[0,\alpha_0]$, что позволяет определить отображение $\mathfrak{P}:[0,\alpha_0]\to\mathcal{Y}$, полагая $\mathfrak{P}(\alpha):=y(\cdot)$, где $y(t):=\pi(t,\alpha)$ для всех $t\in\Delta$. В любой точке $\alpha\in[0,\alpha_0]$ это отображение имеет производную $\mathfrak{P}'(\alpha)$, определяемую согласно (3.23).

Чтобы определить пространство, которое будет рассмотрено в следующей лемме, введем ряд понятий. Пусть $\Delta=[t_0,t_1]\subset\mathbb{R}, q\in[1,\infty)$ и $\Xi=[\xi_0,\xi_1]\subset\mathbb{R}$. Отображение $\mathfrak{f}:\Delta\times\Xi\to\mathbb{R}^p$ называют *функцией Каратеодори*, если

а) для почти всех $t\in\Delta$ функция $\mathfrak{f}(t,\cdot)$ непрерывна и

б) для любого $\xi\in\Xi$ функция $\mathfrak{f}(\cdot,\xi)$ измерима по Лебегу на отрезке Δ.

Любая функция Каратеодори, как можно показать, измерима по Лебегу по совокупности переменных t и ξ. Две функции Каратеодори $\mathfrak{f}_1(\cdot)$ и $\mathfrak{f}_2(\cdot)$ назовем *эквивалентными*, если $\operatorname{mes}\,\{(t,\xi):\mathfrak{f}_1(t,\xi)\neq\mathfrak{f}_2(t,\xi)\}=0$. Введенное отношение эквивалентности порождает разбиение множества всех функций Каратеодори на классы взаимно эквивалентных функций. Для любой

функции Каратеодори $\mathfrak{f}(\cdot)$ отображение $\kappa(t) :=$
$:= \max_{\xi\in\Xi} |\mathfrak{f}(t,\xi)|$, как можно показать, измеримо по t. Поэтому корректно определена величина (конечная или бесконечная)

$$|\mathfrak{f}(\cdot,\cdot)|_{q,C} := \left(\int_\Delta |\kappa(t)|^q \; dt\right)^{1/q}, \text{ где } \kappa(t) := \max_{\xi\in\Xi} |\mathfrak{f}(t,\xi)|. \tag{3.25}$$

В пределах класса эквивалентности она, как легко убедиться, постоянна.

Символом $L_qC(\Delta \times \Xi \to \mathbb{R}^p)$ обозначим семейство всех классов взаимно эквивалентных функций Каратеодори $\mathfrak{f} : \Delta \times \Xi \to \mathbb{R}^p$, для которых величина (3.25) конечна. Это семейство является линейным пространством относительно естественных операций над функциями, а формула (3.25) определяет норму в нем и превращает L_qC в банахово пространство. Полезно также отметить, что для любого $\mathfrak{f}(\cdot) \in L_qC$ корректно определена и непрерывна функция

$$r(\xi) := \int_\Delta \mathfrak{f}(t,\xi)\, dt, \quad \xi \in \Xi,$$

причем линейный оператор $\mathfrak{f}(\cdot) \to r(\cdot)$ из L_qC в C непрерывен.

Следующая лемма обычно полезна при работе с конкретными задачами, в которых уравнение объекта управления интегральное.

Лемма 3.3 (о дифференцировании функции со значениями в L_qC). *Пусть $\Delta = [t_0,t_1] \subset \mathbb{R}, \Xi = [\xi_0,\xi_1] \subset \mathbb{R}, \alpha_0 > 0$ и $q \in [1,\infty)$. Рассмотрим функцию $\pi : \Delta \times \Xi \times [0,\alpha_0] \to \mathbb{R}^p$ переменных $t \in \Delta, \xi \in \Xi$ и $\alpha \in [0,\alpha_0]$ со следующими свойствами.*

$\mathfrak{a}$. *При любых $\xi \in \Xi$ и $\alpha \in [0,\alpha_0]$ функция $\pi(\cdot,\xi,\alpha)$ измерима по Лебегу на отрезке Δ.*

$\mathfrak{b}$. *Для почти всех $t \in \Delta$ функция $\pi(t,\cdot,\cdot)$ переменных ξ и α имеет частную производную по α и непрерывна вместе с ней по совокупности переменных $\xi \in \Xi$ и $\alpha \in [0,\alpha_0]$.*

$\mathfrak{c}$. *$\pi(\cdot,\cdot,\alpha) \in L_qC(\Delta \times \Xi \to \mathbb{R}^p)$ при некотором $\alpha \in [0,\alpha_0]$.*

$\mathfrak{d}$. *Существует неотрицательная функция $\mu(\cdot) \in L_q(\Delta \to \mathbb{R})$, мажорирующая производную $\partial\pi/\partial\alpha$, т.е.*

$$\left|\tfrac{\partial\pi}{\partial\alpha}(t,\xi,\alpha)\right| \le \mu(t) \quad \begin{array}{l} \text{для почти всех } t \in \Delta \\ \text{и всех } \xi \in \Xi,\ \alpha \in [0,\alpha_0]. \end{array} \tag{3.26}$$

Тогда $\pi(\cdot,\cdot,\alpha) \in \mathcal{Y} := L_qC(\Delta \times \Xi \to \mathbb{R}^p)$ для всех $\alpha \in [0,\alpha_0]$, что позволяет определить отображение $\mathfrak{P} : [0,\alpha_0] \to \mathcal{Y}$, полагая $\mathfrak{P}(\alpha) := y(\cdot,\cdot)$, где

$y(t,\xi) := \pi(t,\xi,\alpha)$ для всех $t \in \Delta$ и $\xi \in \Xi$. В любой точке $\alpha \in [0,\alpha_0]$ это отображение имеет производную $\mathfrak{P}'(\alpha)$, причем

$$\mathfrak{P}'(\alpha) = \delta y(\cdot,\cdot), \text{ где } \delta y(t,\xi) := \frac{\partial \pi}{\partial \alpha}(t,\xi,\alpha) \quad \forall t,\xi. \tag{3.27}$$

Применим изложенные соображения к задаче (3.1)-(3.4), формализованной согласно (3.13)-(3.18). Покажем, что для нее функции $F(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ имеют производные Гато по $\boldsymbol{x}$ в любой точке $\boldsymbol{w}_* = [\,\mathbf{x}_*, \mathbf{u}_*]$. В силу (3.13) $\boldsymbol{w} = (\,\mathbf{x}\,,\,\mathbf{u}\,)$, $\mathbf{x} = x(\cdot) \in \boldsymbol{X} = W\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right)$, а $\mathbf{u} = u(\cdot)$. Функция $F(\cdot)$ определена согласно (3.17) и имеет блочную структуру

$$F(\boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{w}) \\ F_2(\boldsymbol{w}) \end{bmatrix}, \text{ где } \begin{array}{rl} F_1(\boldsymbol{w}) := & y(\cdot) \in L_1\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right), \\ & y(t) := \dot{x}(t) - f\left[x(t),u(t)\right] \ \forall t, \\ F_2(\boldsymbol{w}) := & g\left[x(0),x(T)\right] \in \mathbb{R}^k. \end{array}$$

По правилу $\mathfrak{D}$ достаточно установить дифференцируемость по $\mathbf{x}$ блоков $F_1(\cdot)$ и $F_2(\cdot)$.

Блок $F_2(\cdot)$ представляет собой композицию $F_2 = g \circ P$ функции $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ и функции $P(\,\mathbf{x}\,,\,\mathbf{u}\,) := A\,\mathbf{x}$, где линейный непрерывный оператор $A : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ определен формулой $Ax(\cdot) := [x(0),x(T)]$. Согласно $\mathfrak{G}$ функция $g(y) = \|g_i(y)\| \in \mathbb{R}^k$ переменной $y \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ имеет производную Фреше в любой точке и, в частности, в точке $y_* := P\left(\boldsymbol{w}_*\right) = [x_*(0),x_*(T)]$. Эта производная – оператор умножения на матрицу Якоби

$$\text{yak}\; g\left(y_*\right) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(y_*), & \dots & ,\frac{\partial g_1}{\partial y_n}(y_*), & \frac{\partial g_1}{\partial y_{n+1}}(y_*), & \dots & ,\frac{\partial g_1}{\partial y_{2n}}(y_*) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1}(y_*), & \dots & ,\frac{\partial g_n}{\partial y_n}(y_*), & \frac{\partial g_n}{\partial y_{n+1}}(y_*), & \dots & ,\frac{\partial g_n}{\partial y_{2n}}(y_*) \end{array}\right).$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{=:\frac{\partial g}{\partial x_0}(y_*)} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\frac{\partial g}{\partial x_1}(y_*):=}$$

"Разрежем"ее на два указанных блока и условимся записывать элементы $y \in \mathbb{R}^{2n}$ блочно $y = (y_0, y_1)$, где $y_i \in \mathbb{R}^n$. Тогда производная Фреше $g'\left(y_*\right)$ примет вид

$$g'\left(y_*\right)y = \text{yak}\; g\left(y_*\right) \times \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x_0}\left(y_*\right)y_0 + \frac{\partial g}{\partial x_1}\left(y_*\right)y_1 \quad \forall y = (y_0,y_1) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Здесь $\frac{\partial g}{\partial x_0}\left(y_*\right)y_0$ и $\frac{\partial g}{\partial x_1}\left(y_*\right)y_1$ – произведения матрицы на вектор.

Функция $P(\cdot)$ имеет производную Фреше по $\mathbf{x}$ в силу утверждения $\mathfrak{F}$, при этом $P'_x\left(\boldsymbol{w}_*\right) = A$. Согласно $\mathfrak{C}$ эта производная является производной Гато. Применяя правило $\mathfrak{E}$ к композиции $F_2 = g \circ P$, убеждаемся, что функция $F_2(\cdot)$ имеет производную Гато по $\mathbf{x}$ в точке $\boldsymbol{w}_*$, причем для любого $h(\cdot) \in \boldsymbol{X} = W\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right)$

$$\begin{aligned} F_{2,x}' h(\cdot) &= g'\left(y_*\right) P_x'\left(\boldsymbol{w}_*\right) h(\cdot) = g'\left(y_*\right) A h(\cdot) = g'\left(y_*\right)\left[h(0), h(T)\right] = \\ &= \tfrac{\partial g}{\partial x_0}\left[x_*(0), x_*(T)\right] h(0) + \tfrac{\partial g}{\partial x_1}\left[x_*(0), x_*(T)\right] h(T). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Блок $F_1(\cdot)$ представляет собой разность двух отображений $F_1(\boldsymbol{w}) = F_{11}(\boldsymbol{w}) - F_{12}(\boldsymbol{w})$, где $F_{11}(\boldsymbol{w}) := \dot{x}(\cdot)$ и

$$F_{12}(\boldsymbol{w}) := y(\cdot), \text{ где } y(t) := f\left[x(t), u(t)\right] \quad \forall t. \tag{3.29}$$

Слагаемое $F_{11}(\cdot)$ имеет оговоренную в $\mathfrak{F}$ структуру, причем соответствующий оператор $A : \boldsymbol{X} = W\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right) \to L_1\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right)$ – это оператор дифференцирования $Ax(\cdot) := \dot{x}(\cdot)$. Применяя утверждение $\mathfrak{F}$, а затем $\mathfrak{C}$, убеждаемся, что функция $F_{11}(\cdot)$ имеет производную Гато по $\mathbf{x}$, причем

$$F_{11,x}'\left(\boldsymbol{w}_*\right) h(\cdot) = \dot{h}(\cdot) \quad \forall h(\cdot) \in \boldsymbol{X} = W\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right).$$

При работе с функцией $F_{12}(\cdot)$ воспользуемся определением производной Гато по $\mathbf{x}$, следуя изложенной ранее схеме. Для этого выберем $\mathbf{h} = h(\cdot) \in \boldsymbol{X}$ и согласно этой схеме сформируем функцию $\mathfrak{P}(\alpha) := F_{12}\left[x_*(\cdot) + \alpha h(\cdot), u_*(\cdot)\right]$. Подставляя сюда (3.29), получаем

$$\mathfrak{P}(\alpha) = y(\cdot) \in \mathcal{Y} := L_1\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right), \text{ где } y(t) := \pi(t, \alpha)$$

и функция $\pi(\cdot)$ определена соотношением $\pi(t,\alpha) := f\left[x_*(t) + \alpha h(t), u_*(t)\right]$. Легко убедиться, что она удовлетворяет предположениям леммы 3.2 (при $\Delta := [0,T]$, $q := 1$, $p := n$, $\alpha_0 := 1$), причем

$$\partial \pi(t,\alpha)/\partial \alpha == \frac{\partial f}{\partial x}\left[x_*(t) + \alpha h(t), u_*(t)\right] h(t)$$

и оценка (3.24) верна с $\mu(\cdot) :=$ const , так как производная $\partial \pi(t,\alpha)/\partial\alpha$ непрерывна по α и кусочно-непрерывна по t. По лемме 3.2, существует производная $\mathfrak{P}'(\alpha) = \delta y(\cdot)$, где

$$\delta y(t) := \partial \pi(t,\alpha)/\partial \alpha = \frac{\partial f}{\partial x}\left[x_*(t) + \alpha h(t), u_*(t)\right] h(t).$$

Следовательно, существует производная функции $F_{12}(\cdot)$ в точке $\boldsymbol{w}_*$ по направлению $h(\cdot)$, причем

$$\delta F_{12}\left[\boldsymbol{w}_* | h(\cdot)\right] = \mathfrak{P}'(0) = \delta y(\cdot), \quad \text{где } \delta y(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\left[x_*(t), u_*(t)\right] h(t). \tag{3.30}$$

Линейность этой производной по $h(\cdot)$ очевидна. Оценка (3.22) немедленно следует из определения нормы

$$|x(\cdot)|_X = \max_{t\in[0,T]} |x(t)| + \int_0^T |\dot{x}(t)| \ dt$$

пространства $\boldsymbol{X} = W\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right)$:

$$|\delta F_{12}\left[\boldsymbol{w}_*|h(\cdot)\right]| = \int_0^T \left|\frac{\partial f}{\partial x}\left[x_*(t),u_*(t)\right]h(t)\right| \ dt \leq$$
$$\leq \int_0^T \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\left[x_*(t),u_*(t)\right]\right\| |h(t)| \ dt \leq \underbrace{\int_0^T \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\left[x_*(t),u_*(t)\right]\right\| dt}_{c} \, |h(\cdot)|_X \, .$$

В итоге заключаем, что функция $F_{12}(\cdot)$ также имеет производную Гато по $\mathbf{x}$ в точке $\boldsymbol{w}_*$, причем $F'_{12,x}\left(\boldsymbol{w}_*\right)h(\cdot) = \delta F_{12}\left[\boldsymbol{w}_*|h(\cdot)\right] = \delta y(\cdot)$, где $\delta y(\cdot)$ определено в (3.30).

Собирая установленные факты с учетом $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{D}$, убеждаемся, что функция $F(\cdot)$ имеет производную Гато по $\mathbf{x}$ в точке $\boldsymbol{w}_*$, причем

$$\begin{gathered}
F'_x\left(\boldsymbol{w}_*\right)h(\cdot) = \begin{bmatrix} \delta y(\cdot) \\ \delta y_0 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{Y} = L_1\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right) \times \mathbb{R}^k, \\
\delta y(t) := \dot{h}(t) - \tfrac{\partial f}{\partial x}\left[x_*(t),u_*(t)\right]h(t) \quad \forall t, \\
\delta y_0 := \tfrac{\partial g}{\partial x_0}\left[x_*(0),x_*(T)\right]h(0) + \tfrac{\partial g}{\partial x_1}\left[x_*(0),x_*(T)\right]h(T).
\end{gathered} \tag{3.31}$$

Дифференцируемость функции $\Phi(\cdot)$ устанавливается аналогично и проще, причем оказывается, что

$$\begin{gathered}
\Phi'_x\left(\boldsymbol{w}_*\right) = \int_0^T \tfrac{\partial \varphi}{\partial x}\left[x_*(t),u_*(t)\right]h(t)\ dt + \\
+\tfrac{\partial \eta}{\partial x_0}\left[x_*(0),x_*(T)\right]h(0) + \tfrac{\partial \eta}{\partial x_1}\left[x_*(0),x_*(T)\right]h(T).
\end{gathered} \tag{3.32}$$

Доказательство формулы (3.32) мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Обоснование непрерывности производных. Пусть $P(\cdot)$ – какая-то из функций, фигурирующих в абстрактной задаче. Нужно показать, что

$$\left\|P'_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) - P'_x\left(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{u}^0\right)\right\| \to 0 \text{ при } \left|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right| \to 0, \boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{u} \in \Lambda \tag{3.33}$$

для любого множества $\Lambda \subset \boldsymbol{U}_\partial$ из выбранного идеала.

Напомним, что фигурирующая в (3.33) операторная норма $\|\cdot\|$ определена соотношением $\|A\| := \sup_{|x|=1}|Ax|$. Для обоснования сходимости (3.33) не обязательно точно вычислять этот супремум; достаточно оценить его сверху $\|A\| \leq k$. Требуемое неравенство следует из оценки: $|A\boldsymbol{h}| \leq k|\boldsymbol{h}|$ (для всех $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{X}$), которую называют *мультипликативной* и которую в приложениях, как правило, несложно обосновать.

В итоге доказательство непрерывности производной обычно следует схеме

Обоснование непрерывности производной $P'_x(\cdot)$, т.е. обоснование соотношения (3.33)	$\Longleftarrow$	Вывод мультипликативной оценки $\left|P'_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\boldsymbol{h} - P'_x\left(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{u}^0\right)\boldsymbol{h}\right| \leq c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})|\boldsymbol{h}|\ \forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{X}$.	&	Доказательство сходимости к нулю коэффициента $c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ из этой оценки $c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \to 0$ при $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0| \to 0, \boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}^0$, $\boldsymbol{u} \in \Lambda$ для любого множества $\Lambda \subset \boldsymbol{U}_\partial$ из выбранного идеала.

Подчеркнем, что в мультипликативной оценке константа $c(\cdot)$ может зависеть от $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$, но не должна зависеть от $\boldsymbol{h}$.

Рассмотрим задачу (3.1)-(3.4), формализованную согласно (3.13)-(3.18), и установим для нее непрерывность производной $F'_x(\cdot)$ функции $P(\cdot) := F(\cdot)$ в смысле сходимости (3.33). (Случай $P(\cdot) := \Phi(\cdot)$ разбирается аналогично и проще, мы оставляем его читателю в качестве упражнения.)

Для вывода мультипликативной оценки следут выбрать $\mathbf{h} = h(\cdot) \in \boldsymbol{X} = W([0,T] \to \mathbb{R}^n)$ и рассмотреть разность $\Delta\boldsymbol{y} := F'_x(\mathbf{x}, \mathbf{u})\,\mathbf{h} - F'_x(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)\,\mathbf{h}$. Согласно (3.31)

$$\Delta\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \Delta y(\cdot) \\ \Delta y_0 \end{bmatrix},$$

где

$$\Delta y(t) := \frac{\partial f}{\partial x}\left[x^0(t), u^0(t)\right] h(t) - \frac{\partial f}{\partial x}\left[x(t), u(t)\right] h(t) \quad \forall t,$$

$$\begin{aligned} \Delta y_0 \ &= \ \tfrac{\partial g}{\partial x_0}\left[x(0), x(T)\right] h(0) - \tfrac{\partial g}{\partial x_0}\left[x^0(0), x^0(T)\right] h(0) + \\ &+ \ \tfrac{\partial g}{\partial x_1}\left[x(0), x(T)\right] h(T) - \tfrac{\partial g}{\partial x_1}\left[x^0(0), x^0(T)\right] h(T). \end{aligned}$$

Далее следует записать формулу для нормы $|\Delta\boldsymbol{y}|$ элемента $\Delta\boldsymbol{y}$ в пространстве $L_1 \times \mathbb{R}^k$. Для определенности условимся, что норма в прямом произведении нескольких пространств – это сумма норм компонент. Тогда $|\Delta \boldsymbol{y}| = |\Delta y(\cdot)|_1 + |\Delta y_0|$ и с учетом найденных выражений для $\Delta y(\cdot)$ и Δy_0 мы имеем

$$\begin{gathered}
|F_x'(\mathbf{x},\mathbf{u})\mathbf{h} - F_x'(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}^0)\,\mathbf{h}| = |\Delta y(\cdot)|_1 + |y_0| = \\
= \int_0^T \left|\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}[x(t),u(t)] - \tfrac{\partial f}{\partial x}[x^0(t),u^0(t)]\right)h(t)\right|\,dt + \\
+ \left|\left(\tfrac{\partial g}{\partial x_0}[x(0),x(T)] - \tfrac{\partial g}{\partial x_0}[x^0(0),x^0(T)]\right)h(0)\right| + \\
+ \left|\left(\tfrac{\partial g}{\partial x_1}[x(0),x(T)] - \tfrac{\partial g}{\partial x_1}[x^0(0),x^0(T)]\right)h(T)\right|.
\end{gathered}$$

Оценим здесь выражения вида $|Mb|$, где M – матрица, а b – вектор, по принципу $|Mb| \le |M||b|$. Учтем также, что $|h(t)| \le |h(\cdot)|_X = = \max_{s\in[0,T]} |h(s)| + \int_0^T \left|\dot h(s)\right|\,ds$ при любом $t \in [0,T]$ и, в частности, при $t := 0, T$. В результате получаем требуемую мультипликативную оценку

$$\begin{gathered}
|F_x'(\mathbf{x},\mathbf{u})\mathbf{h} - F_x'(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}^0)\,\mathbf{h}| \le \\
\le \int_0^T \left|\tfrac{\partial f}{\partial x}[x(t),u(t)] - \tfrac{\partial f}{\partial x}[x^0(t),u^0(t)]\right| |h(t)|\,dt + \\
+ \left|\tfrac{\partial g}{\partial x_0}[x(0),x(T)] - \tfrac{\partial g}{\partial x_0}[x^0(0),x^0(T)]\right| |h(0)| + \\
+ \left|\tfrac{\partial g}{\partial x_1}[x(0),x(T)] - \tfrac{\partial g}{\partial x_1}[x^0(0),x^0(T)]\right| |h(T)| \le c(\boldsymbol{w})|h(\cdot)|_X,
\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}
c(\boldsymbol{w}) = \int_0^T \left|\tfrac{\partial f}{\partial x}[x(t),u(t)] - \tfrac{\partial f}{\partial x}[x^0(t),u^0(t)]\right|\,dt + \\
+ \left|\tfrac{\partial g}{\partial x_0}[x(0),x(T)] - \tfrac{\partial g}{\partial x_0}[x^0(0),x^0(T)]\right| + \\
+ \left|\tfrac{\partial g}{\partial x_1}[x(0),x(T)] - \tfrac{\partial g}{\partial x_1}[x^0(0),x^0(T)]\right|.
\end{gathered} \tag{3.34}$$

Покажем теперь, что

$$c(\boldsymbol{w}) \to 0 \quad \text{при} \quad \left|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right|_X \to 0,\ \mathbf{u} \to \mathbf{u}^0,\ \mathbf{u} \in \Lambda \subset \boldsymbol{U}_\partial, \tag{3.35}$$

где Λ – произвольное подмножество из выбранного нами идеала $\mathfrak{L}$ в пространстве $\boldsymbol{U}_\partial$. Он определен согласно (3.16), а метрика пространства $\boldsymbol{U}_\partial$ – согласно (3.15). Поэтому условия $\mathbf{u} \to \mathbf{u}^0$, $\mathbf{u} \in \Lambda$ из (3.35) означают, что

$$\operatorname{mes} E \to 0,\ \text{где}\ E := \left\{t : u(t) \ne u^0(t)\right\}, \tag{3.36}$$

$$|u(\cdot)|_\infty \le c < \infty,\ u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial. \tag{3.37}$$

Другими словами, управление $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$ изменяется так, что верно (3.36) и норма $|u(\cdot)|_\infty$ остается ограниченной. Сходимость $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|_X \to 0$ с учетом определения нормы

$$|h(\cdot)|_X = \max_{s\in[0,T]} |h(s)| + \int_0^T \left|\dot h(s)\right| \, ds$$

означает, что

$$\left|x(\cdot) - x^0(\cdot)\right|_C \to 0, \quad \left|\dot x(\cdot) - \dot x^0(\cdot)\right|_1 \to 0. \tag{3.38}$$

Итак, $x(\cdot)$ сходится к $x^0(\cdot)$ в совершенно ином смысле, чем $u(\cdot)$ к $u^0(\cdot)$. Поэтому в выражении для константы $c(\boldsymbol{w})$ удобно объединить в одну группу члены, содержащие разные состояния и одинаковые управления, а в другую группу – содержащие разные управления и одинаковые состояния. Обоснование сходимости к нулю первой и второй группы будет основано на разных аргументах. Чтобы добиться желаемой группировки членов, в выражение, стоящее в (3.34) под знаком нормы в интеграле, добавим и вычтем $\frac{\partial f}{\partial x}\left[x^0(t), u(t)\right]$. После элементарных оценок получим

$$c(\boldsymbol{w}) \le c_1(\boldsymbol{w}) + c_2(\boldsymbol{w}), \tag{3.39}$$

где

$$\begin{gathered} c_1(\boldsymbol{w}) = \textstyle\int_0^T \underbrace{\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\left[x(t), u(t)\right] - \dfrac{\partial f}{\partial x}\left[x^0(t), u(t)\right]\right|}_{\mu} \, dt + \\ + \left|\tfrac{\partial g}{\partial x_0}\left[x(0), x(T)\right] - \tfrac{\partial g}{\partial x_0}\left[x^0(0), x^0(T)\right]\right| + \\ + \left|\tfrac{\partial g}{\partial x_1}\left[x(0), x(T)\right] - \tfrac{\partial g}{\partial x_1}\left[x^0(0), x^0(T)\right]\right|, \end{gathered} \tag{3.40}$$

$$c_2(\boldsymbol{w}) = \int_0^T \left|\frac{\partial f}{\partial x}\left[x^0(t), u(t)\right] - \frac{\partial f}{\partial x}\left[x^0(t), u^0(t)\right]\right| \, dt. \tag{3.41}$$

Из первого соотношения (3.38) следует, что $x(0) \to x^0(0)$, $x(T) \to x^0(T)$, и поэтому в (3.40) второе и третье слагаемое стремятся к нулю. С учетом (3.37) и вытекающего из (3.13) включения $u(t) \in \Omega$ ясно, что подынтегральное выражение μ в первом слагаемом всюду не превосходит

$$\kappa := \max_{\substack{v\,\in\overline{\Omega}, |v|\,\le c \\ |x'-x"|\,\le \left|x(\cdot)-x^0(\cdot)\right|_C \\ |x"|\,\le \left|x^0(\cdot)\right|_C}} \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\left[x', v\right] - \frac{\partial f}{\partial x}\left[x\, v\right]\right|}_{\nu}. \tag{3.42}$$

(Действительно, при $v := u(t), x' := x(t), x" := x^0(t)$ величина ν, очевидно, равна μ, причем указанные значения $v, x', x"$ удовлетворяют условиям из (3.42).) Следовательно, первое слагаемое в (3.40) не превосходит κT. Здесь $\kappa \to 0$ ввиду того, что $|x(\cdot) - x^0(\cdot)|_C \to 0$ согласно (3.38), а функция $\frac{\partial f}{\partial x}[x, v]$, как и любая непрерывная функция, равностепенно непрерывна на компактном множестве

$$\left\{(x,v) : v \in \overline{\Omega}, |v| \leq c, |x| \leq \left|x^0(\cdot)\right|_C + 1\right\}.$$

Итак, $c_1(\boldsymbol{w}) \to 0$.

Для оценки константы (3.41) заметим, что вне множества E, определенного в (3.36), подынтегральное выражение в (3.41) равно нулю. Поэтому

$$\begin{aligned} c_2(\boldsymbol{w}) = \textstyle\int_0^T \left|\frac{\partial f}{\partial x}[x^0(t), u(t)] - \frac{\partial f}{\partial x}[x^0(t), u^0(t)]\right| \, dt \leq \\ \leq \operatorname{mes} E \ \sup{}_{t\in[0,T]} \Big(\underbrace{\left|\tfrac{\partial f}{\partial x}[x^0(t), u(t)]\right|}_{\rho_1(t)} + \underbrace{\left|\tfrac{\partial f}{\partial x}[x^0(t), u^0(t)]\right|}_{\rho_2(t)}\Big), \end{aligned} \tag{3.43}$$

где в силу (3.37)

$$\rho_i(t) \leq r := \max_{\substack{v \in \overline{\Omega} \\ |v| \leq c + \left|u^0(\cdot)\right|_\infty \\ t \in [0,T]}} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\left[x^0(t), v\right]\right| < \infty.$$

Вспоминая (3.36), убеждаемся, что $c_2(\boldsymbol{w}) \to 0$.

Итак, $c_1(\boldsymbol{w}) \to 0, c_2(\boldsymbol{w}) \to 0$ и с учетом (3.39) становится ясно, что $c(\boldsymbol{w}) \to 0$. Таким образом, непрерывность $F_x'(\cdot)$ доказана.

Проверка условия липшицевости фигурирующих в задаче функций по управлению, т.е. условия III, либо условия III'.

Пусть $P(\cdot)$ – какая-то из функций, фигурирующих в задаче. Нужно показать, что

$$|P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}") - P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}')| \leq c_{x,\Lambda} d(\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}') \quad \forall \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}' \in \Lambda. \tag{3.44}$$

Здесь состояние $\boldsymbol{x}$ фиксировано, а $d(\cdot)$ – метрика пространства $\boldsymbol{U}_\partial$. Неравенство (3.44) должно быть обосновано для любой точки $\boldsymbol{x}$ из числа оговоренных условием III (или условием III') и любого множества Λ из выбранного идеала $\mathfrak{L}$. Константа $c_{x,\Lambda}$ может зависеть от $\boldsymbol{x}$ и Λ, но не должна зависеть от $\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}" \in \Lambda$.

Обычно проверка этого условия сводится к несложным оценкам. Их типичные моменты достаточно полно проявляются на примере задачи (3.1)-(3.4), к рассмотрению которой и перейдем. Покажем, что она удовлетворяет условию III. Другими словами, установим, что для нее функции $P(\cdot) :=$

$F(\cdot), \Phi(\cdot)$ липшицевы по управлению в смысле справедливости оценки (3.44) для любых $\boldsymbol{x} \in \Theta$ и $\Lambda \in \mathfrak{L}$. Мы докажем этот факт только для функции $F(\cdot)$; случай функции $\Phi(\cdot)$ мы предлагаем рассмотреть читателю самостоятельно.

Итак, выберем $\mathbf{x} = x(\cdot) \in \Theta = \boldsymbol{X}, \Lambda \in \mathfrak{L}$, а также управления $u'(\cdot), u''(\cdot) \in \Lambda$. По определению (3.16) идеала $\mathfrak{L}$

$$u'(\cdot), u''(\cdot) \in \Lambda \implies |u'(\cdot)|_\infty \leq c, |u''(\cdot)|_\infty \leq c, \tag{3.45}$$

где константа $c = c_\Lambda < \infty$ не зависит от $u'(\cdot), u''(\cdot) \in \Lambda$. Исходя из определения (3.17) функции $F(\cdot)$, найдем разность $\Delta\boldsymbol{y} := F[\mathbf{x}, u''(\cdot)] - -F[\mathbf{x}, u'(\cdot)]$, норму которой нам предстоит оценить,

$$\Delta\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \Delta y(\cdot) \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ где } \Delta y(t) := f[x(t), u'(t)] - f[x(t), u''(t)] \quad \forall t.$$

Вспоминая, что $\Delta\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y} := L_1 \times \mathbb{R}^k$ и норма в прямом произведении нескольких пространств определена как сумма норм компонент, имеем

$$\begin{gathered} |F[\mathbf{x}, u''(\cdot)] - F[\mathbf{x}, u'(\cdot)]| = |\Delta\boldsymbol{y}| = |\Delta y(\cdot)|_1 = \\ = \int_0^T |f[x(t), u'(t)] - f[x(t), u''(t)]|\ dt. \end{gathered} \tag{3.46}$$

Далее рассуждаем по аналогии с оценкой (3.43) величины $c_2(\boldsymbol{w})$. Обозначим $E := \{t : u'(t) \neq u''(t)\}$; согласно (3.15) $\operatorname{mes} E = d[u'(\cdot), u''(\cdot)]$. Заметим, что вне множества E подынтегральное выражение в (3.46) равно нулю. Поэтому

$$\begin{gathered} |F[\mathbf{x}, u''(\cdot)] - F[\mathbf{x}, u'(\cdot)]| \leq \int_E |f[x(t), u'(t)] - f[x(t), u''(t)]|\ dt \leq \\ \operatorname{mes} E \sup_{t \in [0,T]} (\underbrace{|f[x(t), u'(t)]|}_{\rho_1(t)} + \underbrace{|f[x(t), u''(t)]|}_{\rho_2(t)}) \end{gathered},$$

где в силу (3.45)

$$\rho_i(t) \leq K_{x(\cdot),\Lambda} := \max_{\substack{v \in \overline{\Omega}, |v| \leq c \\ t \in [0,T]}} |f[x(t), v]| < \infty.$$

В итоге получаем требуемую оценку

$$|F[\mathbf{x}, u''(\cdot)] - F[\mathbf{x}, u'(\cdot)]| \leq 2K_{x(\cdot),\Lambda}\, d[u'(\cdot), u''(\cdot)].$$

Проверка условия IV, которое, напомним, требует, чтобы образ $\operatorname{Im} F'_x(\boldsymbol{w}^0)$ оператора $F'_x(\boldsymbol{w}^0)$ был замкнут и имел конечную коразмерность.

Для обоснования этого условия можно, например, найти образ $\operatorname{Im} F_x'(\boldsymbol{w}^0)$ и убедиться, что он обладает нужными свойствами. Однако довольно часто более простым и удобным оказывается другой способ проверки. Познакомимся с ним.

Для этого заметим вначале, что свойство оператора $F_x'(\boldsymbol{w}^0)$, о котором идет речь в условии IV, имеет смысл применительно к любому оператору A из одного линейного нормированного пространства $\mathcal{X}$ в другое $\mathcal{Y}$. В этой связи скажем, что *условие IV верно для оператора* A, если образ $\operatorname{Im} A$ этого оператора замкнут и имеет конечную коразмерность. Таким образом, наша цель – доказать справедливость условия IV для оператора $F_x'(\boldsymbol{w}^0)$.

Далее мы изложим леммы 3.4 и 3.5, которые показывают, что условие IV инвариантно относительно определенных преобразований оператора. Поэтому при проверке этого условия вместо исходного оператора можно рассматривать преобразованный. Такая акция, разумеется, имеет смысл только если преобразованный оператор проще исходного. Оказывается, в большинстве приложений упомянутые две леммы (именуемые далее *редукционными*)позволяют упростить оператор $F_x'(\boldsymbol{w}^0)$. При этом про полученный в итоге преобразований оператор $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, как правило, хорошо известно, что уравнение $A\delta x = \delta y$ имеет решение $\delta x \in \mathcal{X}$ для любой правой части $\delta y \in \mathcal{Y}$. Поэтому $\operatorname{Im} A = \mathcal{Y}$ и, значит, условие IV для оператора A заведомо верно. Но тогда оно верно и для исходного оператора $F_x'(\boldsymbol{w}^0)$. Итак,

Проверка условия IV

ЧАСТО СЛЕДУЕТ СХЕМЕ

Опираясь на редукционные леммы (т.е. на леммы 3.4 и 3.5, излагаемые далее), упрощаем оператор $F_x'\left(w^0\right)$, преобразуя его в некоторый оператор $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. В соответствии с указанными леммами справедливость условия IV для оператора $F_x'(\boldsymbol{w}^0)$ равносильна справедливости этого условия для оператора A.	$\longrightarrow$	Доказываем, что уравнение $$A\delta x = \delta y$$ имеет решение δx (возможно, неединственное) для любой правой части $\delta y \in \mathcal{Y}$. Это означает, что $\operatorname{Im} A = \mathcal{Y}$ и, значит, условие IV для оператора A заведомо верно. Но тогда в силу редукционных лемм оно верно и для исходного оператора $F_x'(\boldsymbol{w}^0)$.

Перейдем к изложению редукционных лемм. Первая из них рассматривает оператор A из банахова пространства $\boldsymbol{X}$ в произведение $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}_1 \times \dots \times \boldsymbol{Y}_p$ банаховых пространств $\boldsymbol{Y}_i$. Тогда значение $A\boldsymbol{x}$ – это набор $A\boldsymbol{x} = \big(\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_p\big)$. Его компоненты $\boldsymbol{y}_i$ однозначно определены аргументом $\boldsymbol{x}$ и, очевидно, являются непрерывными линейными операторами от этого аргумента $\boldsymbol{y}_i = A_i\boldsymbol{x}, A_i : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}_i$. Эти операторы A_i именуют *блоками оператора* A_i.

Лемма 3.4 (Первая редукционнная лемма). *Пусть* $A : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *– непрерывный линейный оператор из банахова пространства* $\boldsymbol{X}$ *в произведение* $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}_1 \times \dots \times \boldsymbol{Y}_p$ *банаховых пространств* $\boldsymbol{Y}_1, \dots, \boldsymbol{Y}_p$, *т.е.* $A\boldsymbol{x} = [A_1\boldsymbol{x}, \dots, A_p\boldsymbol{x}]$, *где* $A_i : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}_i$ *– блоки оператора* A.

Пусть $\dim \boldsymbol{Y}_i < \infty$ *для* $i = q+1, \dots, p$. *Тогда условие IV верно для оператора* A *в том и только том случае, когда оно справедливо для оператора* $B : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}_1 \times \dots \times \boldsymbol{Y}_q$, *определенного соотношением* $B\boldsymbol{x} := (A_1\boldsymbol{x}, \dots, A_q\boldsymbol{x})$.

Вывод из данной леммы прост и ясен: *при проверке условия IV блоки, принимающие значения в конечномерных пространствах, можно отбрасывать.* Это, разумеется, упрощает оператор.

Лемма 3.5 (Вторая редукционнная лемма). *Пусть* $A = B + C$, *где* A, B, C *– непрерывные линейные операторы из банахова пространства* $\boldsymbol{X}$ *в банахово пространство* $\boldsymbol{Y}$. *Предположим, что оператор* C *вполне непрерывен. Тогда условие IV верно для оператора* A *в том и только том случае, когда оно справедливо для оператора* B.

Напомним, что оператор C называют *вполне непрерывным*, если он преобразует любое ограниченное подмножество $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{X}$ в множество $C\boldsymbol{D}$, относительно компактное в $\boldsymbol{Y}$ (т.е. такое, что замыкание $\overline{C\boldsymbol{D}}$ компактно.)

Чтобы воспользоваться леммой 3.5, необходимо умение распознавать вполне непрерывные операторы среди операторов, встретившихся при исследовании конкретной задачи. Для этого полезно иметь в виду, в частности, следующие общеизвестные факты.

$\mathfrak{H}$. *Пусть* $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ *– банаховы пространства. Линейная комбинация* $A := c_1A_1 + c_2A_2$ *вполне непрерывных линейных операторов* $A_i : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ *– вполне непрерывный линейный оператор.*

$\mathfrak{I}$. *Композиция (в любом порядке) вполне непрерывного линейного оператора и непрерывного линейного оператора – вполне непрерывный линейный оператор. Другими словами, пусть* X, Y, Z *и* H *– банаховы пространства,* $A : X \to Y$ *– вполне непрерывный линейный оператор, а* $B : Y \to Z$ *и* $C : H \to X$ *– непрерывные линейные операторы. То-*

гда композиции $B \circ A : X \to Z$ и $A \circ C : H \to Y$ – также вполне непрерывные линейные операторы.

$\mathfrak{I}$. *Пусть X, Y – банаховы пространства. Любой линейный непрерывный оператор A с конечномерным образом $Im\, A$ вполне непрерывен.*

Следующие две леммы указывают два очень полезных примера вполне непрерывных операторов.

Лемма 3.6. *Пусть $\Delta = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ – ограниченный интервал и $q \in [1, \infty)$. Оператор вложения $W\left(\Delta \to \mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow L_q\left(\Delta \to \mathbb{R}^d\right)$ вполне непрерывен.*

Напомним, что оператор вложения $W\left(\Delta \to \mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow L_q\left(\Delta \to \mathbb{R}^d\right)$ – это оператор $J : W\left(\Delta \to \mathbb{R}^d\right) \to L_q\left(\Delta \to \mathbb{R}^d\right)$, который не меняет функцию $Jx(\cdot) := x(\cdot)$, а лишь изменяет ее "среду обитания"с $W\left(\Delta \to \mathbb{R}^d\right)$ на $L_q\left(\Delta \to \mathbb{R}^d\right)$.

Лемма 3.7. *Пусть $\Delta = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ и $\Xi := [\xi_0, \xi_1] \subset \mathbb{R}$ – ограниченные интервалы вещественной оси, $\tau_0, \tau_1 : \Xi \to \Delta$ – непрерывные функции и $K(\xi, t)$ – функция переменных $\xi \in \Xi$ и $t \in \Delta$ со значениями в пространстве $(p{\times}q)$-матриц и следующими свойствами*

а) *$K(\cdot)$ – функция Каратеодори, т.е.*

- *для любого $\xi \in \Xi$ функция $K(\xi, \cdot)$ измерима по Лебегу на интервале Δ и*
- *для почти всех $t \in \Delta$ функция $K(\cdot, t)$ непрерывна на интервале Ξ,*

б) *существует такая неотрицательная функция $\alpha(\cdot) \in L_1(\Delta \to \mathbb{R})$ одной переменной $t \in \Delta$, что $|K(\xi, t)| \le \alpha(t)$ при любом $\xi \in \Xi$ и почти всех $t \in \Delta$ (т.е. указанное неравенство верно для всех $\xi \in \Xi$ и $t \in M_\xi$. Здесь M_ξ – некоторое измеримое множество полной меры $mes\, M_\xi = mes\, \Delta$, вообще говоря, свое для каждого ξ).*

Тогда для любой функции $x(\cdot) \in C(\Delta \to \mathbb{R}^q)$ и любого $\xi \in \Xi$ функция $K(\xi, t)x(t) \in \mathbb{R}^p$ переменной $t \in \Delta$ суммируема на интервале Δ, а интеграл

$$y(\xi) := \int_{\tau_1(\xi)}^{\tau_2(\xi)} K(\xi, t)x(t)\, dt$$

непрерывно зависит от $\xi \in \Xi$. Соответствующий интегральный оператор $x(\cdot) \to y(\cdot)$ из $C(\Delta \to \mathbb{R}^q)$ в $C(\Xi \to \mathbb{R}^p)$ вполне непрерывен.

Применим изложенные факты к задаче (3.1)-(3.4), формализованной согласно (3.13)-(3.18), и установим для нее справедливость условия IV. Для этой задачи оператор $F'_x(\boldsymbol{w}^0)$ определен соотношением (3.31) (где следует взять $\boldsymbol{w}_* := \boldsymbol{w}^0, x_*(\cdot) := x^0(\cdot), u_*(\cdot) := u^0(\cdot)$). Мы видим, что он состоит из двух блоков $F'_x(\boldsymbol{w}^0)\,h(\cdot) = [A_1 h(\cdot), A_2 h(\cdot)]$, причем

$$\begin{aligned} A_1 h(\cdot) \;&:=\; \delta y(\cdot) \in L_1([0,T] \to \mathbb{R}^n), \\ &\quad\;\; \delta y(t) := \dot h(t) - \tfrac{\partial f}{\partial x}[x^0(t), u^0(t)]\,h(t) \quad \forall t, \end{aligned} \tag{3.47}$$

$A_2 h(\cdot) = \delta y_0 \in \mathbb{R}^k$ и δy_0 вычисляется согласно (3.31). По лемме 3.4 блок $A_2 : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}^k$ можно отбросить, т.е. заниматься далее оператором (3.47). Его естественно записать в виде суммы $A_1 = B + C$ двух операторов $B, C : \boldsymbol{X} \to L_1([0,T] \to \mathbb{R}^n)$, которые определим соотношениями

$$Bh(\cdot) := \dot h(\cdot), \quad Ch(\cdot) := M(\cdot) h(\cdot) \quad \forall h(\cdot) \in \boldsymbol{X},$$

где $M(t) := -\frac{\partial f}{\partial x}[x^0(t), u^0(t)]$. Покажем теперь, что оператор C вполне непрерывен. Действительно, заметим, что он представляет собой композицию

$$C = \widetilde{C} \circ J. \tag{3.48}$$

Здесь $J : \boldsymbol{X} = W([0,T] \to \mathbb{R}^n) \to L_1([0,T] \to \mathbb{R}^n)$ – оператор вложения пространства W в L_1; он вполне непрерывен по лемме 3.6. В свою очередь $\widetilde{C} : L_1([0,T] \to \mathbb{R}^n) \to L_1([0,T] \to \mathbb{R}^n)$ – оператор умножения функции $y(\cdot) \in L_1$ на кусочно-непрерывную функцию $M(\cdot)$ (со значениями в пространстве $(n \times n)$-матриц). Корректность определения этого оператора и его непрерывность следует из простой оценки

$$\int_0^T |M(t) y(t)|\, dt \le |M(\cdot)|_\infty \int_0^T |y(t)|\, dt = |M(\cdot)|_\infty\, |y(\cdot)|_1 .$$

В итоге применяя к композиции (3.48) утверждение $\mathfrak{I}$, убеждаемся, что оператор C вполне непрерывен.

По лемме 3.5 его также можно отбросить и, значит, заниматься оператором $B : W([0,T] \to \mathbb{R}^n) \to L_1([0,T] \to \mathbb{R}^n)$, т.е. оператором дифференцирования $Bh(\cdot) = \dot h(\cdot)$. Отвечающее ему уравнение $B\delta x(\cdot) = \delta y(\cdot)$ имеет вид $\frac{d\,\delta x(t)}{dt} = \delta y(t)\ \forall t$ и, как хорошо известно, разрешимо относительно $\delta x(\cdot) \in W$ при любой правой части $\delta y(\cdot) \in L_1$. Поэтому $\operatorname{Im} B = L_1([0,T] \to \mathbb{R}^n)$ и, следовательно, условие IV для оператора B выполнено. Применяя леммы 3.4 и 3.5, заключаем, что оно верно и для оператора $F'_x(\boldsymbol{w}^0)$.

Проверка условияV. Оно, напомним, описывает пространство $\boldsymbol{U}_\partial$ и метрику $d(\cdot)$ в нем. Если следовать изложенному ранее плану формализации конкретной задачи, то обсуждаемое условие не нуждается в проверке, так как его справедливость гарантирована п.5 этого плана. Действительно, в соответствии с ним в качестве $\boldsymbol{U}_\partial$ и $d(\cdot)$ берется именно то пространство и именно та метрика, которые указаны в этом условии.

Проверка требований к идеалу $\mathfrak{L}$ подмножеств пространства U_∂, т.е. условияVI, либо условия VI'. Эти условия также не нуждаются в специальной проверке, если следовать предложенному ранее плану формализации конкретной задачи. Действительно, согласно п.5 этого плана в качестве $\mathfrak{L}$ берется либо идеал из условия VI, либо идеал из условия VI'. Поэтому выполнение одного из этих условий гарантировано.

Проверка условия VII. Нужно убедиться, что любой гамильтонов функционал $H(\cdot) \in \mathbb{H}(\boldsymbol{w}^0)$ представим в виде суммы константы и интеграла

$$H[u(\cdot)] = \boldsymbol{c} + \int_\Delta \mathfrak{H}[t, u(t)]\ dt \quad \forall u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial. \tag{3.49}$$

Здесь $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ и Δ – интервал, на котором согласно условию V определены функции $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$. (Для задачи (3.1)-(3.4) $\Delta = [0, T]$.) Функция $\mathfrak{H}(t, u)$ переменных $t \in \Delta$ и $u \in \Omega(t)$ должна быть такой, что композиция $\phi(t) := \mathfrak{H}[t, u(t)]$ измерима и суммируема по $t \in \Delta$ для любого управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$. Напомним также, что гамильтонов функционал – это любой функционал $H : \boldsymbol{U}_\partial \to \mathbb{R}$, который можно получить по формуле $H[u(\cdot)] := -L[\boldsymbol{x}^0, u(\cdot)]$, исходя из некоторого решения абстрактного сопряженного уравнения $L'_x(\boldsymbol{w}^0) = 0$. Его решения – это наборы множителей Лагранжа: l^*, λ_0 – для задачи (2.1) без неравенств и $l^*, \lambda_0, \dots, \lambda_s$ – для задачи (2.17) с равенствами и неравенствами. При этом для задачи (2.1)

$$L(\boldsymbol{w}) := L(\boldsymbol{w}|l^*, \lambda_0) := l^* F(\boldsymbol{w}) + \lambda_0 \Phi(\boldsymbol{w}), \tag{3.50}$$

а для задачи (2.17)

$$L(\boldsymbol{w}) := L(\boldsymbol{w}|l^*, \lambda_0, \dots, \lambda_s) := l^* F(\boldsymbol{w}) + \lambda_0 \Phi(\boldsymbol{w}) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i G_i(\boldsymbol{w}). \tag{3.51}$$

В соответствии с содержанием обсуждаемого условия его проверку было бы естественно начать с решения абстрактного сопряженного уравнения. Затем для каждого из найденных решений следовало бы построить отвечающий ему гамильтонов функционал и убедиться, что он имеет требуемый вид (3.49).

Оказалось однако, что обычно выгоднее действовать несколько иначе. Именно, вначале анализ абстрактного сопряженного уравнения, опускаем. Другими словами, вначале пытаемся доказать, что требуемый вид (3.49) имеет функционал $H[u(\cdot)] := -L[\boldsymbol{x}^0, u(\cdot)]$, отвечающий любым множителям Лагранжа, а не только решениям абстрактного сопряженного уравнения, как требует условие VII. В случае успеха справедливость условия VII гарантирована и его проверка завершена. В случае неудачи вспоминаем, что нам разрешено рассматривать только решения абстрактного сопряженного уравнения, т.е. переходим к выполнению исходного плана.

Целесообразность такой схемы объясняется двумя обстоятельствами. Во-первых, опуская анализ абстрактного сопряженного уравнения, мы, как правило, существенно упрощаем рассуждения. Во-вторых, практика показала, что за малым исключением при правильной формализации конкретной задачи все без исключения множители Лагранжа порождают функционал $H(\cdot)$ вида (3.49). Поэтому при условии правильной формализации велика вероятность того, что справедливость условия VII на самом деле удасться обосновать, не прибегая к анализу абстрактного сопряженного уравнения. Связанные с этим рассуждения, как правило, просты и в любом случае полезны для возможной последующей проверки условия VII уже без всяких упрощений.

Выяснение вида функционала $H(\cdot)$, отвечающего произвольным множителям Лагранжа, естественно провести следующим образом. Вначале выясняем, как устроен функционал l^* в выбранном нами пространстве $\boldsymbol{Y}$. Затем конкретизируем вид лагранжиана $L(\boldsymbol{w})$. Для этого подставляем в определяющую его формулу (3.50) (для задачи с неравенствами – в (3.51)) найденное выражение для функционала l^*, а также формулы, определяющие функции $F(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ (а также $G_i(\cdot)$ – в случае задачи с неравенствами). Напомним, что эти формулы были выбраны на этапе формализации. После этого остается подставить $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{x}^0$ в полученное выражение для лагранжиана $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$. Итак,

$$\overbrace{\hspace{10cm}}^{\text{Проверка условия VII}}$$

ОБЫЧНО СЛЕДУЕТ СХЕМЕ

Выясняем, как устроен произвольный функционал $l^* \in Y^*$ в том конкретном пространстве, которое было выбранов качестве $\boldsymbol{Y}$ на этапе формализации задачи.

Конкретизируем вид лагранжиана $L(w)$, используя для этого найденное выражение для функционала l^* и формулы, определяющие функции $F(\cdot), \Phi(\cdot)$ (и $G_i(\cdot)$ - в случае задачи (2.17) с неравенствами).

Рассматриваем набор множителей Лагранжа, являющийся решением абстрактного сопряженного уравнения. "Расшифровываем"это уравнение (см. разд.3.5). В результате, как правило, обнаруживаем, что рассматриваемый функционал l^* обладает какими-то дополнительными свойствами по сравнению с произвольным функционалом из Y^*. Повторяем проделанные ранее рассуждения, но уже с учетом этих свойств.

Определяем вид функционала $H\left[u(\cdot)\right] := -\,L\left[x^0, u(\cdot)\right]$, подставляя $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{x}^0$ в полученное выражение для лагранжиана $L(\cdot)$.

При первом прохождении

При повторном прохождении

Нет

Проверяем, имеет ли функционал $H(\cdot)$ нужный вид

$$H\left[u(\cdot)\right] = \boldsymbol{c} + \int_{\Delta} \mathfrak{H}\,\left[t, u(t)\right]\, dt,$$

где функция $\mathfrak{H}\,(t, v)$ удовлетворяет требованиям условия VII.

Да

Условие VII не выполнено

Условие VII верно

При выяснении "устройства"функционала $l^* \in \boldsymbol{Y}^*$ часто полезны следующие общеизвестные факты. Далее запись $Z \sim H$ означает, что линейные нормированные пространства Z и H изоморфны.

$\mathfrak{K}$. $(\boldsymbol{Y}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{Y}_p)^* \sim \boldsymbol{Y}_1^* \times \cdots \times \boldsymbol{Y}_p^*$, *где* $\boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_p$ *– линейные норми-*

рованные пространства. Соответствие между функционалами $l^* \in (\boldsymbol{Y}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{Y}_p)^*$ *и наборами* $\left(l_1^*, \ldots, l_p^*\right) \in \boldsymbol{Y}_1^* \times \cdots \times \boldsymbol{Y}_p^*$ *задается формулой*

$$l^*\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{p} l_i^* \boldsymbol{y}_i \quad \forall \boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_p\right) \in \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{Y}_p. \tag{3.52}$$

Другими словами, любой такой набор порождает по формуле (3.52) функционал $l^* \in \boldsymbol{Y}^*$. Обратно, любой функционал $l^* \in \boldsymbol{Y}^*$ порождается по этой формуле некоторым набором $\left(l_1^*, \ldots, l_p^*\right) \in \boldsymbol{Y}_1^* \times \cdots \times \boldsymbol{Y}_p^*$, причем порождающий набор единственен.

$\mathfrak{L}$. $(\mathbb{R}^q)^* \sim \mathbb{R}^q$. *Соответствие между функционалами* $l^* \in (\mathbb{R}^q)^*$ *и векторами* $\lambda \in \mathbb{R}^q$ *задается формулой*

$$l^* y = \lambda^\top y \quad \forall y \in \mathbb{R}^q.$$

$\mathfrak{M}$. $\left\{L_p\left([t_0, t_1] \to \mathbb{R}^d\right)\right\}^* \sim L_q\left([t_0, t_1] \to \mathbb{R}^d\right)$ *для* $p \in [1, \infty)$. *Здесь* $q := \frac{p}{p-1}$ *при* $p > 1$ *и* $q := \infty$ *при* $p = 1$. *Соответствие между функционалами* $l^* \in \left\{L_p\left([t_0, t_1] \to \mathbb{R}^d\right)\right\}^*$ *и функциями* $\psi(\cdot) \in L_q\left([t_0, t_1] \to \mathbb{R}^d\right)$ *задается формулой*

$$l^* y(\cdot) = \int_{t_0}^{t_1} \psi(t)^\top y(t)\, dt \quad \forall y(\cdot) \in L_p\left([t_0, t_1] \to \mathbb{R}^d\right). \tag{3.53}$$

Символом $\mathfrak{B}\,(t_0, t_1)$ обозначим σ-алгебру борелевских подмножеств интервала $[t_0, t_1]$. Будем рассматривать заданные на этой σ-алгебре счетно-аддитивные регулярные функции множества $\mu : \mathfrak{B}\,(t_0, t_1) \to \mathbb{R}$. (Подчеркнем, что каждая из рассматриваемых функций принимает только конечные значения, причем произвольного знака.) Пространство всех таких функций множества обозначим через MR (t_0, t_1).

$\mathfrak{N}$. $\{C([t_0, t_1] \to \mathbb{R})\}^* \sim MR\,(t_0, t_1)$. *Соответствие между функционалами* $l^* \in \{C([t_0, t_1] \to \mathbb{R})\}^*$ *и функциями множества* $\mu(\cdot) \in MR\,(t_0, t_1)$ *задается формулой*

$$l^* y(\cdot) = \int_{[t_0, t_1]} y(t) \mu(dt) \quad \forall y(\cdot) \in C([t_0, t_1] \to \mathbb{R}).$$

Отметим, что общий вид функционала $l^* \in \left\{C\left([t_0, t_1] \to \mathbb{R}^d\right)\right\}^*$ в пространстве непрерывных вектор-функций $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^d$ легко определяется на основе утверждений $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{N}$ ввиду очевидного изоморфизма

$$C\left([t_0,t_1]\to\mathbb{R}^d\right)\sim\underbrace{C\left([t_0,t_1]\to\mathbb{R}\right)\times\cdots\times C\left([t_0,t_1]\to\mathbb{R}\right)}_{d\text{ раз}}.$$

Применим изложенные соображения к задаче (3.1)-(3.4), формализованной согласно (3.13)-(3.18). Покажем, что она удовлетворяет условию VII. Для этого в соответствии с намеченной схемой действий рассмотрим произвольные множители Лагранжа $l^*\in\boldsymbol{Y}^*$ и $\lambda_0\in\mathbb{R}$. Так как согласно (3.14) $\boldsymbol{Y}=L_1\left([0,T]\to\mathbb{R}^n\right)\times\mathbb{R}^k$, то по утверждению $\mathfrak{K}$

$$l^*\,\mathbf{y}\,=l_1^*y(\cdot)+l_2^*y_0\quad\forall\,\mathbf{y}\,=[y(\cdot),y_0]\in\boldsymbol{Y},$$

где $l_1^*\in\left\{L_1\left([0,T]\to\mathbb{R}^n\right)\right\}^*$ и $l_2^*\in\left(\mathbb{R}^k\right)^*$. Здесь в силу утверждения $\mathfrak{M}$ (которое рассмотрим при $t_0:=0,t_1:=T,p:=1,d:=n$) функционал l_1^* имеет вид

$$l_1^*y(\cdot)=\int_0^T\psi(t)^\top y(t)\,dt\quad\forall y(\cdot)\in L_1\left([0,T]\to\mathbb{R}^n\right),$$

где $\psi(\cdot)\in L_\infty\left([0,T]\to\mathbb{R}^n\right)$. Используя утверждение $\mathfrak{L}$, определяем вид функционала l_2^*:

$$l_2^*y_0=\lambda^\top y_0\quad\forall y_0\in\mathbb{R}^k.$$

Здесь $\lambda\in\mathbb{R}^k$. Собирая установленные факты, выясняем, как устроен функционал $l^*\in\boldsymbol{Y}^*$:

$$\begin{gathered}l^*\,\mathbf{y}\,=\textstyle\int_0^T\psi(t)^\top y(t)\,dt+\lambda^\top y_0\\ \forall\,\mathbf{y}\,=[y(\cdot),y_0]\in\boldsymbol{Y}=L_1\left([0,T]\to\mathbb{R}^n\right)\times\mathbb{R}^k.\end{gathered}\tag{3.54}$$

Следующий шаг – конкретизация формулы $L(\boldsymbol{w})=l^*F(\boldsymbol{w})+\lambda_0\Phi(\boldsymbol{w})$, определяющей лагранжиан. В эту формулу следует вместо l^* подставить найденное выражение (3.54), а вместо $F(\boldsymbol{w})$ и $\Phi(\boldsymbol{w})$ – выражения, приведенные в определениях (3.17) и (3.18) этих функций. Другими словами, в (3.54) $y(\cdot)$ и y_0 следует взять в указанном в (3.17) виде и к результату добавить умноженную на λ_0 правую часть равенства (3.18)

$$\begin{gathered}L(\boldsymbol{w})=\textstyle\int_0^T\psi(t)^\top\left\{\dot{x}(t)-f\left[x(t),u(t)\right]\right\}\,dt+\\ +\lambda^\top g\left[x(0),x(T)\right]+\lambda_0\left\{\textstyle\int_0^T\varphi\left[x(t),u(t)\right]\,dt+\eta\left[x(0),x(T)\right]\right\}.\end{gathered}$$

Вводя *функцию Гамильтона*

$$\mathcal{H}(t,x,v):=\psi(t)^\top f(x,v)-\lambda_0\varphi(x,v)\tag{3.55}$$

переменных $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^n$ и $v \in \overline{\Omega}$, а также *граничную функцию Лагранжа*

$$\Gamma\left(x_0, x_1\right) := \lambda^\top g\left(x_0, x_1\right) + \lambda_0 \eta\left(x_0, x_1\right) \tag{3.56}$$

переменных $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, полученную формулу можно записать короче

$$\begin{gathered} L(\boldsymbol{w}) = \int_0^T \psi(t)^\top \dot{x}(t)\ dt - \int_0^T \mathcal{H}\left[t, x(t), u(t)\right]\ dt + \\ +\Gamma\left[x(0), x(T)\right] \quad \forall \boldsymbol{w} = [x(\cdot), u(\cdot)] \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{U}_\partial. \end{gathered} \tag{3.57}$$

Отсюда немедленно получаем выражение для интересующего нас функционала

$$\begin{gathered} H\left[u(\cdot)\right] := -L\left[x^0(\cdot), u(\cdot)\right] = \\ = \underbrace{-\int_0^T \psi(t)^\top \dot{x}^0(t)\ dt - \Gamma\left[x^0(0), x^0(T)\right]}_{\mathfrak{k}} + \int_0^T \mathcal{H}\left[t, x^0(t), u(t)\right]\ dt. \end{gathered}$$

Таким образом, он действительно имеет нужный вид (3.49), причем

$$\mathfrak{H}\left(t, v\right) := \mathcal{H}\left[t, x^0(t), v\right]. \tag{3.58}$$

Убедимся, что функция $\mathfrak{H}(\cdot)$ обладает всеми свойствами, которые требует условие VII. Действительно, в (3.55) и (3.58) функции $x^0(t) \in \mathbb{R}^n$ и $\psi(t) \in \mathbb{R}^n$ заданы при $t \in [0,T]$, а функции $f(x,v)$ и $\varphi(x,v)$ – при $x \in \mathbb{R}^n$ и $v \in \overline{\Omega}$. Поэтому функция $\mathfrak{H}\ (t,v)$ определена при всех $t \in [0,T]$ и $v \in \overline{\Omega}$. Пусть $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$; согласно (3.13) функция $u(t) \in \Omega$ кусочно-непрерывна по $t \in [0,T]$. Вспомним также, что функции $f(x,v)$ и $\varphi(x,v)$ непрерывны по совокупности переменных $x \in \mathbb{R}^n, v \in \overline{\Omega}$, функция $x^0(t)$ непрерывна по $t \in [0,T]$ и $\psi(\cdot) \in L_\infty\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right)$. Отсюда и из (3.55) и (3.58) следует, что композиция $\phi(t) := \mathfrak{H}\ [t, u(t)] = \psi(t)^\top f\left[x^0(t), u(t)\right] - \lambda_0 \varphi\left[x^0(t), u(t)\right]$ измерима и существенно ограничена по $t \in [0,T]$. Поэтому она заведомо суммируема по $t \in [0,T]$, как и требует условие VII.

Итак, *для задачи* (3.1)-(3.4)*, формализованной согласно* (3.13)-(3.18)*, справедливы все предположения теоремы* 2.1*, т.е. условия I-VII.*

3.5. Расшифровка абстрактных необходимых условий оптимальности. Итак, исследуемая конкретная задача представлена в виде частного случая абстрактной задачи. Мы убедились, что в этом случае справедливы предположения одной из теорем 2.1-2.3. (Для задачи (3.1) - (3.4) это теорема 2.1.) Значит, теперь мы можем применить эту теорему и записать соответствующие необходимые условия оптимальности процесса $\boldsymbol{w}^0 = (\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0)$.

Эти условия одинаковы для всех упомянутых теорем, применимых к рассматриваемой задаче. (К задаче (2.1) без неравенств применимы все три теоремы, к задаче (2.17) с равенствами и неравенствами применима только теорема 2.3.) Теоремы утверждают, что существует допустимый набор множителей Лагранжа, удовлетворяющий абстрактному сопряженному уравнению

$$L'_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{w}^0\right) = 0 \tag{3.59}$$

и обеспечивающий выполнение абстрактного принципа максимума

$$H\left(\boldsymbol{u}^0\right) = \max_{u \in \boldsymbol{U}_\partial} H(\boldsymbol{u}). \tag{3.60}$$

Здесь $L(\cdot)$ – лагранжиан, отвечающий рассматриваемым множителям, и $H(\boldsymbol{u}) := -L\left(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}\right)$. Для задачи (2.1) без неравенств допустимый набор множителей Лагранжа – это пара $l^* \in \boldsymbol{Y}^*, \lambda_0 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \|l^*\| + \lambda_0 > 0, \tag{3.61}$$

а лагранжиан – это функция

$$L\left(\boldsymbol{w}\right) := l^* F(\boldsymbol{w}) + \lambda_0 \Phi(\boldsymbol{w}).$$

Для задачи (2.17) с ограничениями в виде равенства $F(\boldsymbol{w}) = 0$ и неравенств $G_1(\boldsymbol{w}) \leq 0, \ldots, G_s(\boldsymbol{w}) \leq 0$ набор множителей Лагранжа содержит больше компонент $l^* \in \boldsymbol{Y}^*, \lambda_0, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$, а допустимым называют набор, для которого верны соотношения

$$\begin{gathered}
\lambda_0 \geq 0, \ldots, \lambda_s \geq 0, \\
\lambda_0 + \ldots + \lambda_s + \|l^*\| > 0, \\
\lambda_1 G_1\left(\boldsymbol{w}^0\right) = 0, \ldots, \lambda_s G_s\left(\boldsymbol{w}^0\right) = 0.
\end{gathered}$$

Лагранжиан для этой задачи задан формулой

$$L\left(\boldsymbol{w}\right) := l^* F(\boldsymbol{w}) + \lambda_1 G_1(\boldsymbol{w}) + \ldots + \lambda_s G_s(\boldsymbol{w}) + \lambda_0 \Phi(\boldsymbol{w}).$$

Необходимые условия, которые мы напомнили, относятся к общему случаю абстрактной задачи. Сейчас предстоит записать их применительно к ее частному случаю. Это означает, что все фигурирующие в необходимых условиях оптимальности объекты (процесс $\boldsymbol{w}^0$, состояние $\boldsymbol{x}$, пространство $\boldsymbol{U}_\partial$, функционалы $l^*, L(\cdot), H(\cdot)$ и т.д.) следует взять в том частном виде, который они имеют в этом конкретном случае. Другими словами, вспоминаем, как была конкретизирована "природа"состояния $\boldsymbol{x}$ и управления $\boldsymbol{u}$ при формализации задачи, какие пространства были взяты в качестве $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}\}$ и $\boldsymbol{U}_\partial = \{\boldsymbol{u}\}$, а также, как был построен процесс $\boldsymbol{w}^0$ (и функции $G_i(\cdot)$ – в случае задачи с неравенствами). Используем также факты, установленные при проверке условия VII, т.е. вспоминаем, как "устроены"функционалы l^* и $H(\cdot)$, а также лагранжиан $L(\cdot)$ в рассматриваемом случае. Всю упомянутую "конкретику"вносим в необходимые условия оптимальности. В результате их запись должна быть полностью избавлена от символов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}^0, \boldsymbol{U}_\partial$, $l^*, L(\cdot), H(\cdot), F(\cdot), \Phi(\cdot)$ (и $G_i(\cdot)$), обозначающих объекты, относящиеся к абстрактной задаче. Если после указанной конкретизации необходимые условия оптимальности можно упростить, то это, несомненно, следует сделать. Оба рассмотренные действия, т.е. конкретизация и упрощение, составляют последний этап решения задачи – расшифровку абстрактных необходимых условий оптимальности.

В соответствии с их содержанием этот этап включает, во-первых, расшифровку абстрактного сопряженного уравнения, во-вторых, расшифровку абстрактного принципа максимума, и, в-третьих, расшифровку условия допустимости набора множителей Лагранжа. Эти действия мы обсудим далее. После их выполнениия иногда открываются дополнительные возможности упрощения формулировки результата. Они обычно связаны с анализом результата в целом и в главном сводятся к обнаружению бесполезных соотношений, не несущих никакой информации. Как правило, такое соотношение указывает, чему равен один из множителей Лагранжа, либо какой-то параметр из формулы, разъясняющей устройство множителя l^*. (Для задачи (3.1)-(3.4) – это формула (3.48) и параметры $\psi(\cdot) \in L_\infty, \lambda \in \mathbb{R}^k$.) Напомним, что этими параметрами функционал l^* был замещен в формулировке результата при его конкретизации. Главным признаком "бесполезности"соотношения является то, что определяемый им параметр или множитель p нигде больше не фигурирует. Смысл такого соотношения состоит лишь во введении обозначения p для некого выражения. Однако это обозначение, как выясняется, нигде, кроме своего определения, не используется. Поэтому это обозначение вместе с определяющим его соотношением не нужны и при формулировке результата про них можно забыть.

Завершается расшифровка абстрактных необходимых условий оптимальности формулировкой окончательного результата.

Расшифровка абстрактных необходимых условий оптимальности

Расшифровка абстрактного сопряженного уравнения $L'_x(\boldsymbol{w}^0) = 0$	$\longrightarrow$	Расшифровка абстрактного принципа максимума $H(\boldsymbol{u}^0) = \max_{u \in \boldsymbol{U}_\partial} H(\boldsymbol{u})$	$\longrightarrow$	Расшифровка условия допустимости набора множителей Лагранжа
				$\downarrow$
Формулировка конечного результата.	$\longleftarrow$	Общий анализ результата на наличие соотношений, не несущих никакой полезной информации. В случае обнаружения, удаление этих соотношений из результата вместе с определяемыми ими параметрами или множителями Лагранжа.		

Расшифровка абстрактного сопряженного уравнения. Оно означает, что непрерывный линейный оператор $L'_x(\boldsymbol{w}^0)$ равен нулю. Вначале разъясняем, что это значит, т.е. записываем уравнение в виде

$$L'_x\left(\boldsymbol{w}^0\right)\boldsymbol{h} = 0 \quad \forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{X}. \tag{3.62}$$

Затем переписываем его, вспоминая, какое пространство было взято в качестве $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}\}$ при формализации задачи, как был построен процесс $\boldsymbol{w}^0$, а также подставляя в (3.62) формулу, раскрывающую устройство лагранжиана $L(\cdot)$ в рассматриваемом конкретном случае и установленную при проверке условия VII. (Для задачи (3.1)-(3.4) это формула (3.56).) В результате в левой части уравнения (3.62) получим некоторое конкретное выражение, линейно зависящее от $\boldsymbol{h}$. Затем пытаемся переписать систему (3.62) в терминах коэффициентов этого выражения, т.е. избавиться от использования в ее записи произвольного элемента $\boldsymbol{h}$ и квантора $\forall$. Здесь часто полезны следующие две леммы.

Символом $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}\left([t_0, t_1] \to \mathbb{R}^d\right)$ обозначим пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $z : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^d$, для которых $\operatorname{supp} z(\cdot) := \overline{\{t : z(t) \neq 0\}} \subset (t_0, t_1)$.

Лемма 3.8 (Дюбуа-Реймона).

1. *Пусть* $a(\cdot) \in L_\infty\left([t_0,t_1] \to \mathbb{R}^d\right), b(\cdot) \in L_1\left([t_0,t_1] \to \mathbb{R}^d\right)$. *Тогда*

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)^\top \dot{h}(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} b(t)^\top h(t)\,dt = 0 \quad \forall h(\cdot) \in \overset{\circ}{C}{}^\infty\left([t_0,t_1] \to \mathbb{R}^d\right)$$

в том и только том случае, если после исправления на множестве нулевой лебеговой меры функцию $a(\cdot)$ *можно сделать абсолютно непрерывной и при этом*

$$\dot{a}(\cdot) = b(\cdot). \tag{3.63}$$

2. *Пусть* $a(\cdot) \in L_\infty\left([t_0,t_1] \to \mathbb{R}^d\right), b(\cdot) \in L_1\left([t_0,t_1] \to \mathbb{R}^d\right)$ *и* $m_0, m_1 \in \mathbb{R}^d$. *Тогда*

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{t_1} a(t)^\top \dot{h}(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} b(t)^\top h(t)\,dt + m_0^\top h(t_0) + m_1^\top h(t_1) = 0 \\ \forall h(\cdot) \in C^\infty\left([t_0,t_1] \to \mathbb{R}^d\right)\end{gathered} \tag{3.64}$$

в том и только том случае, если после исправления на множестве нулевой лебеговой меры функцию $a(\cdot)$ *можно сделать абсолютно непрерывной и при этом справедливо равенство* (3.63) *и*

$$a(t_i) = (-1)^i\, m_i \quad \forall i = 0, 1. \tag{3.65}$$

Эта лемма обычно полезна при исследовании тех конкретных задач, для которых уравнение объекта дифференциальное, т.е. содержит производные по времени. Если в этом уравнении таких производных нет, обычно полезен другой факт. Напомним, что символ $\mathfrak{B}\,(t_0,t_1)$ обозначает σ-алгебру борелевских подмножеств интервала $[t_0,t_1]$.

Лемма 3.9. *Пусть* $a(\cdot) \in L_1([t_0,t_1] \to \mathbb{R})$ *и* $\mu : \mathfrak{B}\,(t_0,t_1) \to \mathbb{R}$ – *счетно-аддитивная регулярная функция множества, сосредоточенная на множестве* $E \in \mathfrak{B}\,(t_0,t_1)$ *нулевой лебеговой меры, т.е.* $mes\ E = 0$ *и* $\mu(E') = 0$, *если* $E' \in \mathfrak{B}\,(t_0,t_1)$ *и* $E' \cap E = \emptyset$. *Тогда*

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)h(t)\,dt + \int_{[t_0,t_1]} h(t)\,\mu(dt) = 0 \quad \forall h(\cdot) \in C([t_0,t_1] \to \mathbb{R}) \tag{3.66}$$

в том и только том случае, если $a(t) = 0$ *для почти всех* $t \in [t_0,t_1]$ *и* $\mu(\mathcal{E}) = 0$ *для всех* $\mathcal{E} \in \mathfrak{B}\,(t_0,t_1)$.

Полезно также помнить, что

$$c \in \mathbb{R}^d \;\&\; c^\top z = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^d \quad \Leftrightarrow \quad c = 0_{R^d}\,. \tag{3.67}$$

Наконец, в случае когда пространство состояний $\boldsymbol{X}$ – это произведение нескольких пространств, расшифровку абстрактного сопряженного уравнения полезно начинать с применения следующего простого результата.

Лемма 3.10. *Пусть* $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p$ *– банаховы пространства и в* (3.62) $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{X}_p$, *т.е. элементы* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ *– это наборы* $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p)$, *где* $\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{X}_i$. *Тогда соотношения* (3.62) *имеют место в том и только том случае, если*

$$L'_{x_i}\left(\boldsymbol{w}^0\right)\boldsymbol{h}_i = 0 \quad \forall \boldsymbol{h}_i \in \boldsymbol{X}_i, i = 1, \ldots, p. \tag{3.68}$$

Применим изложенные соображения к задаче (3.1)-(3.4), формализованной согласно (3.13)-(3.18). Для нее, напомним, $\boldsymbol{X} := W\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right)$, $\boldsymbol{w}^0 = \left[x^0(\cdot), u^0(\cdot)\right], \boldsymbol{w} = \left[x(\cdot), u(\cdot)\right]$ и лагранжиан $L(\cdot)$ – это функционал (3.56). Поэтому для вычисления величины $L'_x\left(\boldsymbol{w}^0\right)h$ из (3.62) следует найти первую вариацию по $\mathbf{x} = x(\cdot)$ выражения в правой части равенства (3.56). В результате убеждаемся, что абстрактное сопряженное уравнение имеет вид

$$\begin{gathered}\int_0^T \psi(t)^\top \dot{h}(t)\,dt - \int_0^T \tfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\left[t, x^0(t), u^0(t)\right]h(t)\,dt + \\ + \tfrac{\partial \Gamma}{\partial x_0}\left[x^0(0), x^0(T)\right]h(0) + \tfrac{\partial \Gamma}{\partial x_1}\left[x^0(0), x^0(T)\right]h(T) = 0 \\ \forall h(\cdot) \in W\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right).\end{gathered} \tag{3.69}$$

При $h(\cdot) \in C^\infty\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right) \subset W\left([0,T] \to \mathbb{R}^n\right)$ равенство (3.69) принимает вид (3.64), где $t_0 := 0$, $t_1 := T$, $d := n$, $a(\cdot) := \psi(\cdot)$, $b(\cdot) := -\left\{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\left[t, x^0(t), u^0(t)\right]\right\}^\top$, $m_i := \left\{\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\left[x^0(0), x^0(T)\right]\right\}^\top$ $(i = 0, 1)$. Поэтому по лемме 3.8 функцию $\psi(\cdot)$ можно так исправить на множестве нулевой лебеговой меры, что она станет абсолютно непрерывной и при этом справедливы равенства (3.63) и (3.65). В нашем случае они имеют вид

$$\dot{\psi}(t)^\top = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\left[t, x^0(t), u^0(t)\right] \quad \forall t \in [0,T], \tag{3.70}$$

$$\psi(0)^\top = \frac{\partial \Gamma}{\partial x_0}\left[x^0(0), x^0(T)\right], \quad \psi(T)^\top = -\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}\left[x^0(0), x^0(T)\right]. \tag{3.71}$$

Итак, (3.69)⇒(3.70)&(3.71). Интегрируя в (3.69) по частям, легко убедиться, что (3.70)&(3.71)⇒(3.69). Таким образом, соотношения (3.70), (3.71) (вместе с условием дифференцируемости функции $\psi(\cdot)$) представляют собой эквивалентную переформулировку, а, значит, и "расшифровку"абстрактного сопряженного уравнения (3.69).

Расшифровка абстрактного принципа максимума

$$H\left(\boldsymbol{u}^0\right) = \max_{u \in \boldsymbol{U}_\partial} H(\boldsymbol{u}) \tag{3.72}$$

опирается на условия V и VII. В первом из них описано пространство $\boldsymbol{U}_\partial$: это совокупность всех функций $u(\cdot)$, определенных на некотором конечном интервале Δ вещественной оси и принимающих значения в заданном множестве $u(t) \in \Omega = \Omega(t) \subset \mathbb{R}^m$, которое, вообще говоря, может зависеть от аргумента $t \in \Delta$. При этом на выбор предложено два варианта: либо $\boldsymbol{U}_\partial$ состоит из всех измеримых существенно ограниченных функций с перечисленными свойствами, либо из всех кусочно-непрерывных функций с этими свойствами. Условие VII требует, чтобы любой гамильтонов функционал и, в частности, функционал из (3.72) был представим в виде суммы константы и интеграла

$$H\,[u(\cdot)] = \,\boldsymbol{c}\, + \int_\Delta \mathfrak{H}\,[t, u(t)]\; dt \quad \forall u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial. \tag{3.73}$$

Здесь $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ и функция $\mathfrak{H}\,(t, v) \in \mathbb{R}$ переменных $t \in \Delta$ и $v \in \Omega(t) \subset \mathbb{R}^m$ такова, что композиция $\phi(t) := \mathfrak{H}\,[t, u(t)]$ измерима и суммируема по $t \in \Delta$ для любого управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$.

Расшифровка абстрактного принципа максимума (3.72) обычно сводится к применению одной из излагаемых далее лемм 3.11-3.15. Каждая из них указывает, как можно выразить интересующее нас соотношение (3.72) непосредственно через исходные объекты $\Delta, \Omega(\cdot)$ и $\mathfrak{H}\,(\cdot)$, определяющие в нем пространство $\boldsymbol{U}_\partial$ и функционал $H(\cdot)$. При исследовании конкретной задачи мы, естественно, должны рассматривать в этих леммах именно тот интервал и именно то множество (возможно, зависящее от t), которые были взяты в качестве Δ и $\Omega(\cdot)$ на этапе формализации. Кроме того, следует выразить функцию $\mathfrak{H}\,(\cdot)$ из установленных при проверке условия VII формул, которые определяют ее через исходные данные рассматриваемой конкретной задачи, множители Лагранжа λ_i и параметры из соотношения, конкретизирующего устройство множителя l^*. (Например, в случае задачи (3.1)-(3.4) следует выразить функцию $\mathfrak{H}\,(\cdot)$ из (3.55) и (3.58) через исходные данные $f(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ этой задачи, множитель Лагранжа λ_0 и "параметр"$\psi(\cdot)$, определяющий вместе с $\lambda \in \mathbb{R}^k$ множитель $l^* \in \boldsymbol{Y}^*$ по формуле (3.54).)

Упомянутые леммы 3.11-3.15 исходят из разных предположений о пространстве $\boldsymbol{U}_\partial$, функции $\mathfrak{H}\,(\cdot)$, а также об отображении $\Omega(\cdot)$ интервала Δ в семейство всех непустых подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$. (Такие отображения называют *многозначными функциями.*) Именно, в леммах 3.11, 3.13 и 3.15 рассмотрен случай, когда элементы $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$ – кусочно-непрерывные функции, а в леммах 3.12 и 3.14 – случай, когда функции $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$ не обязательно кусочно-непрерывны, а лишь измеримы и существенно ограничены. Во всех леммах функцию $\mathfrak{H}\,(t, v)$ из (3.73) считаем непрерывной по v. При этом в леммах 3.11, 3.13 и 3.15 предполагаем, что эта функция кусочно-непрерывна по t, а в леммах 3.12 и 3.14 – что она всего лишь измерима по t. В леммах 3.11 и 3.12 рассмотрен случай, когда множество Ω не зависит от t; в приложениях он встречается наиболее часто. В остальных леммах рассматриваем общий случай переменного множества $\Omega(\cdot)$.

Подведем итог.

Расшифровка абстрактного принципа максимума
обычно сводится к следующим действиям

Выбираем одну из приведенных далее лемм 3.11-3.15.

Применяем эту лемму. Ее заключение записываем применительно к тому интервалу и тому множеству (возможно, зависящему от t), которые были взяты в качестве Δ и $\Omega(\cdot)$ на этапе формализации. Функцию $\mathfrak{H}(\cdot)$ выражаем через исходные данные исследуемой конкретной задачи, множители Лагранжа λ_i и параметры из соотношения, конкретизирующего устройство множителя l^*. Для этого используем соответствующие формулы (или формулу), установленные при проверке условия VII.

Чтобы упростить первое действие намеченного плана, каждая из излагаемых далее лемм снабжена вынесенной в ее заголовок краткой характеристикой ситуации, к которой эта лемма относится.

Лемма 3.11. (Управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$ кусочно-непрерывны, множество $\Omega(t)$ не зависит от t, функция $\mathfrak{H}(t,v)$ кусочно-непрерывна по t.) *Пусть* $\boldsymbol{U}_\partial := \{u(\cdot) \in PC\,(\Delta \to \mathbb{R}^m) : u(t) \in \Omega\ \forall t \in \Delta\}$, *где* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *– конечный интервал вещественной оси и* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *– некоторое непустое множество. Рассмотрим функцию* $\mathfrak{H}(t,v)$ *переменных* $t \in \Delta$ *и* $v \in \overline{\Omega}$, *удовлетворяющую следующему требованию.*

a) Интервал Δ *можно так разбить на конечное число подынтервалов* $\Delta = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_N$, *что функция* $\mathfrak{H}(t,v)$ *непрерывна по совокупности переменных* t, v *на любом из множеств* $(\,int\,\Delta_j\,) \times \overline{\Omega}$, $j = 1,\ldots,N$ *и допускает непрерывное продолжение с этого множества на его замыкание* $\overline{\Delta_j} \times \overline{\Omega}$ *(таким образом, в точках* $t = t_j$ *функция* $\mathfrak{H}(t,v)$ *может иметь разрывы).*

Предположим также, что задано управление $u^0(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$ *и число* $\boldsymbol{c}$.

Тогда абстрактный принцип максимума (3.72) *с функционалом* (3.73) *справедлив в том и только том случае, если*

$$\mathfrak{H}\,\big[t \pm 0, u^0(t \pm 0)\big] = \max_{v \in \overline{\Omega}} \mathfrak{H}\,[t \pm 0, v] \quad \forall t \in \Delta. \tag{3.74}$$

Здесь либо во всех случаях берется знак плюс, либо во всех – минус, причем равенство (3.74) верно при любом выборе знака. (Если t – левый конец интервала Δ, то в (3.74) рассматриваем только знак плюс, а если t – правый конец, то рассматриваем только минус.)

Лемма 3.12. (Управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$ – измеримые функции, множество $\Omega(t)$ не зависит от t, функция $\mathfrak{H}\,(t, v)$ измерима по t.) *Пусть* $\boldsymbol{U}_\partial :=$ $:= \{u(\cdot) \in L_\infty\,(\Delta \to \mathbb{R}^m) : u(t) \in \Omega$ *для почти всех* $t \in \Delta\}$, *где* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *– конечный интервал вещественной оси и* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *– некоторое непустое множество. Рассмотрим некоторую функцию Каратеодори* $\mathfrak{H}\,(t, v)$ *переменных* $t \in \Delta$ *и* $v \in \overline{\Omega}$, *т.е. функцию, удовлетворяющую следующим двум требованиям.*

а) Для любого $v \in \overline{\Omega}$ *функция* $\mathfrak{H}\,(\cdot, v)$ *измерима на интервале* Δ.

б) Для почти всех $t \in \Delta$ *функция* $\mathfrak{H}\,(t, \cdot)$ *непрерывна на* $\overline{\Omega}$.

Предположим также, что задано управление $u^0(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$ *и число* $\boldsymbol{c}$ *.*

Тогда абстрактный принцип максимума (3.72) *с функционалом* (3.73) *справедлив в том и только том случае, если*

$$\mathfrak{H}\,\big[t, u^0(t)\big] = \max_{v \in \overline{\Omega}} \mathfrak{H}\,[t, v] \quad \text{для почти всех } t \in \Delta. \tag{3.75}$$

Пусть задана многозначная функция $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^m$ переменной $t \in \Delta$. Ее *ветвью* называют любую (однозначную) функцию $u(\cdot)$, которая задана на некотором подынтервале $\Delta' \subset \Delta$ интервала Δ и значение $u(t)$ которой принадлежит множеству $\Omega(t)$ при любом $t \in \Delta'$. Многозначную функцию $\Omega(\cdot)$ назовем *сильно полунепрерывной снизу в точке* $\overline{t}$, если для любого вектора $v \in \Omega(\overline{t})$ существует проходящая через него $u(\overline{t}) \in v$ непрерывная ветвь $u(\cdot)$ многозначной функции $\Omega(\cdot)$, определенная в некоторой окрестности $\Delta_\varepsilon := \big(\overline{t} - \varepsilon, \overline{t} + \varepsilon\big) \cap \Delta$ точки $\overline{t}$. (Число $\varepsilon > 0$ может быть малым.)

Лемма 3.13. (Управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$ кусочно-непрерывны, множество $\Omega(t)$ зависит от t, многозначная функция $\Omega(\cdot)$ сильно полунепрерывна снизу в любой точке $t \in \Delta$, функция $\mathfrak{H}\,(t, v)$ кусочно-непрерывна по t.) *Пусть* $\boldsymbol{U}_\partial :=$ $\{u(\cdot) \in PC\,(\Delta \to \mathbb{R}^m) : u(t) \in \Omega(t)\ \forall t \in \Delta\}$, *где* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *– конечный интервал вещественной оси и* $\emptyset \neq \Omega(t) \subset \mathbb{R}^m$ *– заданная многозначная функция переменной* $t \in \Delta$, *сильно полунепрерывная снизу в любой точке интервала*

Δ. *Рассмотрим также удовлетворяющую условию а) леммы* 3.11 *функцию* $\mathfrak{H}(t,v)$ *переменных* $t \in \Delta$ *и* $v \in \overline{\Omega}$, *где* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – *некоторое заданное множество, причем* $\Omega \supset \Omega(t)$ *для любого* $t \in \Delta$. *Предположим, что задано управление* $u^0(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$ *и число* $\boldsymbol{c}$.

Тогда абстрактный принцип максимума (3.72) *с функционалом* (3.73) *справедлив в том и только том случае, если*

$$\mathfrak{H}\left[t, u^0(t)\right] = \max_{v \in \overline{\Omega(t)}} \mathfrak{H}\,[t,v] \tag{3.76}$$

в любой точке t *интервала* Δ, *за исключением точек разрыва управления* $u^0(\cdot)$, *а также точек разрыва функции* $\mathfrak{H}(\cdot)$.

В следующей лемме рассмотрен наиболее распространенный в приложениях вариант переменного множества $\Omega(\cdot)$: $\Omega(t) = \{v\}$ представляет собой множество решений зависящей от t системы неравенств и уравнений

$$\begin{aligned} \Omega(t) := \{v \in \Omega : \quad & \alpha_1(t,v) \le 0, \ldots, \alpha_p(t,v) \le 0, \\ & \alpha_{p+1}(t,v) = 0, \ldots, \alpha_{p+q}(t,v) = 0\}\,. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Здесь множество Ω задано и от t не зависит и могут отсутствовать либо равенства $q = 0$, либо неравенства $p = 0$, либо и то и другое $p = q = 0$.

Лемма 3.14. (Управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$ – измеримые функции, $\Omega(t)$ – множество решений зависящей от t системы неравенств и уравнений, функция $\mathfrak{H}(t,v)$ измерима по t.) *Пусть*

$$\boldsymbol{U}_\partial := \{u(\cdot) \in L_\infty(\Delta \to \mathbb{R}^m) : u(t) \in \Omega(t) \text{ для почти всех } t \in \Delta\}\,. \tag{3.78}$$

Здесь $\Delta \subset \mathbb{R}$ – *конечный интервал вещественной оси и множество* $\Omega(t)$ *определено согласно* (3.77), *где* $\Omega = \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ – *заданное замкнутое множество (не зависящее от* t*) и* $\alpha_i : \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ – *заданные функции. Предположим, что* $\Omega(t) \ne \emptyset$ *для всех* $t \in \Delta$ *и функция* $\mathfrak{H} : \Delta \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *из* (3.73) *является функцией Каратеодори, т.е. для нее верны условия а) и б) леммы* 3.12. *Предположим, что то же самое верно для любой из фигурирующих в* (3.77) *функций* $\alpha_i(\cdot)$ *(т.е. условия а) и б) леммы* 3.12 *справедливы при* $\mathfrak{H}(\cdot) := \alpha_i(\cdot)$*). Пусть задано управление* $u^0(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$ *и число* $\boldsymbol{c}$.

Тогда абстрактный принцип максимума (3.72) *с функционалом* (3.73) *справедлив в том и только том случае, если*

$$\mathfrak{H}\left[t, u^0(t)\right] = \max_{v \in \Omega(t)} \mathfrak{H}\,[t,v] \quad \text{для почти всех } t \in \Delta.$$

В следующей лемме в отличие от предыдущих мы не делаем никаких дополнительных предположений о многозначной функции $\Omega(\cdot)$.

Лемма 3.15. (Управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$ кусочно-непрерывны, множество $\Omega(t)$ зависит от t, функция $\mathfrak{H}(t,v)$ кусочно-непрерывна по t.) *Пусть*

$$\boldsymbol{U}_\partial := \{u(\cdot) \in PC\,(\Delta \to \mathbb{R}^m) : u(t) \in \Omega(t)\ \forall t \in \Delta\}\,,$$

где $\Delta \subset \mathbb{R}$ – конечный интервал вещественной оси и $\emptyset \neq \Omega(t) \subset \mathbb{R}^m$ – заданная многозначная функция переменной $t \in \Delta$. Обозначим

$$\left.\begin{aligned} \Omega_+(t) &:= \{v = u(t+0) : u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial\} \\ \Omega_-(t) &:= \{v = u(t-0) : u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial\} \end{aligned}\right. \qquad \forall t \in \Delta.$$

Рассмотрим также удовлетворяющую условию а) леммы 3.11 функцию $\mathfrak{H}(t,v)$ переменных $t \in \Delta$ и $v \in \overline{\Omega}$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – некоторое заданное множество, причем $\Omega \supset \Omega(t)$ для любого $t \in \Delta$. Предположим, что задано управление $u^0(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$ и число $\boldsymbol{c}$.

Тогда абстрактный принцип максимума (3.72) с функционалом (3.73) справедлив в том и только том случае, если

$$\mathfrak{H}\left[t \pm 0, u^0(t \pm 0)\right] = \max_{v \in \overline{\Omega_\pm(t)}} \mathfrak{H}\left[t \pm 0, v\right] \quad \forall t \in \Delta.$$

Здесь знак выбирается по тем же правилам, что и в случае соотношения (3.74).

Применительно к пространству (3.78) и измеримой по t функции $\mathfrak{H}(t,v)$ переформулировка абстрактного принципа максимума в общем случае произвольной многозначной функции $\Omega(\cdot)$приведена в [2,§3.1]. В приложениях потребность в этом результате возникает крайне редко. Поэтому здесь мы его не приводим.

Применим изложенные соображения к задаче (3.1)-(3.4), формализованной согласно (3.13)-(3.18). К ней естественно применить лемму 3.11. Действительно, в соответствии с (3.13) для рассматриваемой задачи множество Ω не зависит от t, а функции $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}_\partial$ кусочно-непрерывны. Функция $\mathfrak{H}(\cdot)$ в соотношении (3.73) определена согласно (3.55),(3.58). При этом в (3.55) функции $f(x,v)$ и $\varphi(x,v)$ непрерывны по $x \in \mathbb{R}^n, v \in \overline{\Omega}$ в соответствии с исходными предположениями о исследуемой задаче (3.1)-(3.4), а функция $\psi(\cdot)$ абсолютно непрерывна, как было установлено при расшифровке абстрактного сопряженного уравнения. Следовательно, определяемая соотношением (3.55) функция Гамильтона непрерывна по совокупности переменных t, x, v. Тогда, опираясь на (3.58) и вспоминая, что функция $x^0(\cdot)$ абсолютно непрерывна, заключаем, что функция $\mathfrak{H}(t,v)$ также непрерывна по совокупности переменных t и v. Таким образом, мы действительно имеем дело с частным случаем ситуации, рассмотренной в лемме 3.11.

В соответствии с ней абстрактный принцип максимума (3.72) эквивалентен соотношению (3.74), где функцию $\mathfrak{H}(\cdot)$ следует взять в виде (3.58) и учесть, что $\mathfrak{H}(t \pm 0, v) = \mathfrak{H}(t, v)$ ввиду непрерывности функции $\mathfrak{H}(t, v)$ по t и v

$$\mathcal{H}\left[t, x^0(t), u^0(t \pm 0)\right] = \max_{v \in \overline{\Omega}} \mathcal{H}\left[t, x^0(t), v\right] \quad \forall t \in \Delta. \tag{3.79}$$

Данное соотношение представляет собой расшифровку абстрактного принципа максимума для задачи (3.1)-(3.4).

Расшифровка условия допустимости набора множителей Лагранжа. Напомним, что для задачи (2.1) без неравенств допустимым называют набор множителей Лагранжа $l^* \in \boldsymbol{Y}^*, \lambda_0 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющий соотношениям

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \|l^*\| + \lambda_0 > 0. \tag{3.80}$$

Из них в расшифровке нуждается только второе. Для задачи (2.17) сограничениями в виде равенства $F(\boldsymbol{w}) = 0$ и неравенств $G_1(\boldsymbol{w}) \leq 0, \ldots, G_s(\boldsymbol{w}) \leq 0$ допустимым называют набор $l^* \in \boldsymbol{Y}^*$, $\lambda_0, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$, для которого верны соотношения

$$\lambda_0 \geq 0, \ldots, \lambda_s \geq 0, \quad \lambda_0 + \ldots + \lambda_s + \|l^*\| > 0, \tag{3.81}$$

$$\lambda_1 G_1\left(\boldsymbol{w}^0\right) = 0, \ldots, \lambda_s G_s\left(\boldsymbol{w}^0\right) = 0. \tag{3.82}$$

Здесь расшифровке подлежит последнее соотношение из (3.81), а также равенства (3.82).

Второе соотношение из (3.80) $\|l^*\| + \lambda_0 > 0$ и последнее соотношение из (3.81) $\lambda_0 + \ldots + \lambda_s + \|l^*\| > 0$ одинаковы по смыслу: они констатируют, что некоторые из рассматриваемых множителей Лагранжа l^*, λ_i не равны нулю. При расшифровке этих соотношений следует заменить в их формулировке множитель l^* параметрами из формулы, разъясняющей его устройство и установленной при проверке условия VII. (Для задачи (3.1)-(3.4) это формула (3.54) и параметры $\psi(\cdot) \in L_\infty$ и $\lambda ß \mathbb{R}^k$.) Замечаем, что $l^* = 0$ в том и только том случае, если все эти параметры равны нулю. Поэтому расшифровываемое соотношение означает, что семейство $\mathfrak{R}$, состоящее из упомянутых параметров и множителей λ_i, содержит ненулевой элемент. Затем полезно проанализировать возможность более определенной локализации ненулевого элемента в семействе $\mathfrak{R}$. В случаях когда такая возможность возникает, она является следствием соотношений, установленных в результате расшифровки абстрактного сопряженного уравнения и абстрактного принципа максимума. Если они позволяют линейно выразить некоторый элемент $r \in \mathfrak{R}$ через остальные, то, очевидно, ненулевой элемент обязательно должен быть и в подсемействе $\mathfrak{R}' := \mathfrak{R} \setminus \{r\}$. (Действительно, если бы подсемейство $\mathfrak{R}'$ состояло из одних нулей, то вследствие упомянутого выражения было бы выполнено равенство $r = 0$ и, значит, семейство $\mathfrak{R}$ также не содержало бы ненулевых элементов.) Руководствуясь этими соображениями, следует максимально сузить область локализации ненулевого элемента.

Расшифровка равенств (3.82) сводится к подстановке в них формул, определяющих функции $G_i(\cdot)$ и выбранных на этапе формализации. Следует также вспомнить, как был построен процесс $\boldsymbol{w}^0$.

Применим изложенные соображения к задаче (3.1)-(3.4), формализованной согласно (3.13)-(3.18). Для нее устройство множителя $l^* \in \boldsymbol{Y}^*$ раскрывает формула (3.54). Поэтому условие допустимости набора множителей Лагранжа (3.80) принимает вид

$$\lambda_0 > 0, \quad \int_0^T |\psi(t)| \ dt + |\lambda| + \lambda_0 > 0. \tag{3.83}$$

Здесь второе соотношение означает, что отлична от нуля либо функция $\psi(\cdot)$, либо вектор $\lambda \in \mathbb{R}^k$, либо число λ_0. Заметим далее, что функция $\psi(\cdot)$ однозначно определяется по λ и λ_0 из соотношений (3.70),(3.71). Действительно, λ и λ_0 определяют данные Коши для функции $\psi(\cdot)$ (как в точке $t = 0$, так и в точке $t = T$) согласно(3.56) и (3.71), а также – в силу (3.55) – свободный член в дифференциальном уравнении (3.70)

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t)^\top \ &= -\tfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\left[t, x^0(t), u^0(t)\right] = \\ &= -\psi(t)^\top \tfrac{\partial f}{\partial x}\left[x^0(t), u^0(t)\right] + \lambda_0 \tfrac{\partial \varphi}{\partial x}\left[x^0(t), u^0(t)\right], \end{aligned} \tag{3.84}$$

откуда эта функция однозначно определяется. В частности, при $\lambda = 0$ и $\lambda_0 = 0$ (3.84) является линейным однородным дифференциальным уравнением, причем согласно (3.56) и (3.71) $\psi(0) = \psi(T) = 0$. Поэтому, $\psi(\cdot) \equiv 0$, что вместе с равенствами $\lambda = 0, \lambda_0 = 0$ противоречит (3.83). Следовательно,

$$\lambda_0 \geq 0, \quad |\lambda| + \lambda_0 > 0. \tag{3.85}$$

Эти соотношения представляют собой расшифровку условия допустимости набора множителей Лагранжа применительно к задаче (3.1)-(3.4).

Формулировка окончательного результата. Итак, мы воспользовались теоремой о необходимых условиях оптимальности в абстрактной задаче. Она, напомним, утверждает, что существует допустимый набор множителей Лагранжа $l^*, \{\lambda_i\}$, удовлетворяющий абстрактному сопряженному уравнению и обеспечивающий выполнение абстрактного принципа максимума. Затем мы расшифровали абстрактное сопряженное уравнение, абстрактный принцип максимума и условие допустимости набора. Осталось сформулировать полученный результат в целом. При этом в начальной фразе утверждения теоремы "существуют l^* и λ_i"следует заменить функционал l^* определяющими его параметрами из формулы, разъясняюшей "устройство"этого функционала и установленной при проверке условия VII. (Для задачи (3.1)-(3.4) – это формула (3.55) и параметры $\psi(\cdot) \in L_\infty, \lambda \in \mathbb{R}^k$.) Во всех остальных частях теоремы замена l^* на эти параметры уже произведена ранее.

Итоговый результат целесообразно сформулировать в виде теоремы. Например, для задачи (3.1)-(3.4) результатом предшествующих рассуждений является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть в задаче* (3.1)-(3.4) $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *произвольное непустое подмножество пространства* $\mathbb{R}^m$, *функции* $f(x,u) \in \mathbb{R}^n, \varphi(x,u) \in \mathbb{R}$ *заданы при* $x \in \mathbb{R}^n, u \in \overline{\Omega}$, *имеют первые производные по* x *и непрерывны вместе с ними по* $x \in \mathbb{R}^n, u \in \overline{\Omega}$, *а функции* $g(x_0,x_1) \in \mathbb{R}^k, \eta(x_0,x_1) \in \mathbb{R}$ *заданы при* $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ *и непрерывно дифференцируемы.*

Если процесс $x^0(\cdot), u^0(\cdot)$ *оптимален в рассматриваемой задаче, то существует такая абсолютно непрерывная функция* $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, *вектор* $\lambda \in \mathbb{R}^k$ *и число* $\lambda_0 \geq 0$, *что выполнено сопряженное уравнение*

$$\dot{\psi}(t)^\top = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\left[t, x^0(t), u^0(t)\right] \quad \forall t \in [0,T], \tag{3.86}$$

условия трансверсальности

$$\psi(0)^\top = \frac{\partial \Gamma}{\partial x_0}\left[x^0(0), x^0(T)\right], \quad \psi(T)^\top = -\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}\left[x^0(0), x^0(T)\right], \tag{3.87}$$

а также принцип максимума

$$\mathcal{H}\left[t, x^0(t), u^0(t \pm 0)\right] = \max_{v \in \overline{\Omega}} \mathcal{H}\left[t, x^0(t), v\right] \quad \forall t \in \Delta \tag{3.88}$$

и соотношение

$$\lambda_0 + |\lambda| > 0. \tag{3.89}$$

При этом в (3.86) *и* (3.88) $\mathcal{H}(t,x,v) := \psi(t)^\top f(x,v) - \lambda_0 \varphi(x,v)$ – *функция Гамильтона, а в* (3.87) $\Gamma(x_0,x_1) := \lambda^\top g(x_0,x_1) + \lambda_0 \eta(x_0,x_1)$ – *граничная функция Лагранжа.*

Данная теорема представляет собой формулировку (применительно к задаче (3.1)-(3.4)) центрального результата математической теории оптимального управления – принципа максимума Понтрягина.

Пример появления "бесполезных"соотношений при расшифровке абстрактных необходимых условий оптимальности. В теореме 3.1

перечислены все соотношения, полученные в результате расшифровки абстрактных необходимых условий оптимальности применительно к задаче (3.1)-(3.4). Несложно убедиться, что все эти соотношения существенны: ни одно из них нельзя отбросить без ущерба для содержания теоремы. Продемонстрируем, что такая ситуация имеет место далеко не всегда.

Рассмотрим частный случай задачи (3.1)-(3.4), когда в функционале (3.4) $\eta(\cdot) \equiv 0$, а ограничения (3.2) имеют вид

$$x(0) = a_0, \quad x(T) = a_1, \tag{3.90}$$

где векторы $a_0, a_1 \in \mathbb{R}^n$ заданы. Другими словами, считаем, что в (3.2) $k := 2n$ и

$$g\left(x_0, x_1\right) = \left(x_0 - a_0, x_1 - a_1\right) \in \mathbb{R}^{2n} \quad \forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n;$$

тогда равенство (3.2) принимает вид (3.90).

Все предшествующие рассуждения, касающиеся применения абстрактной теории к задаче (3.1)-(3.4), естественно, остаются в силе применительно к ее частному случаю. Поэтому для него итогом расшифровки абстрактных необходимых условий оптимальности является утверждение теоремы 3.1, записанное для указанных функций $\eta(\cdot)$ и $g(\cdot)$. В этом случае граничная функция Лагранжа равна $\Gamma\left(x_0, x_1\right) = \overline{\lambda}^*\left(x_0 - a_0\right) + \widetilde{\lambda}^*\left(x_1 - a_1\right)$, где $\overline{\lambda}, \widetilde{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ блоки вектора $\lambda = \left(\overline{\lambda}, \widetilde{\lambda}\right) \in \mathbb{R}^{2n}$. Поэтому условия трансверсальности (3.87) имеют вид

$$\psi(0) = \overline{\lambda}, \quad \psi(T) = -\widetilde{\lambda}. \tag{3.91}$$

Заметим также, что условие (3.89) допускает эквивалентную переформулировку в виде

$$\psi(\cdot) \not\equiv 0, \quad \text{либо } \lambda_0 > 0. \tag{3.92}$$

Действительно, импликация (3.89) $\Rightarrow$ (3.92) имеет место в силу (3.91). Покажем, что (3.92) $\Rightarrow$ (3.89). Пусть (3.92) верно. Если $\lambda_0 > 0$, то справедливость (3.89) очевидна. Допустим, что $\lambda_0 = 0$. Тогда линейное дифференциальное уравнение (3.86) становится однородным

$$\dot{\psi}(t)^\top = -\psi(t)^\top \frac{\partial f}{\partial x}\left[x^0(t), u^0(t)\right] \quad \forall t \in [0, T].$$

В силу первого неравенства из (3.92) решение $\psi(\cdot)$ этого уравнения не обращается в нуль по крайней мере в некоторых точках интервала $[0, T]$. Отсюда, как хорошо известно, следует, что функция $\psi(\cdot)$ не обращается в нуль нигде на этом интервале и, в частности, в точках $t = 0$ и $t = T$. В силу (3.91) это влечет неравенства $\overline{\lambda} \neq 0, \widetilde{\lambda} \neq 0, \lambda = \left(\overline{\lambda}, \widetilde{\lambda}\right) \neq 0$, а, значит, и (3.89).

Подводя итог, заключаем, что для обсуждаемого частного случая задачи (3.1)-(3.4) расшифровка абстрактных необходимых условий оптимальности непосредственно приводит к следующему утверждению.

Пусть процесс $[x^0(\cdot), u^0(\cdot)]$ *оптимален в рассматриваемой задаче. Тогда существует такая абсолютно непрерывная функция* $\psi(t) \in \mathbb{R}^n$ *переменной* $t \in [0, T]$, *векторы* $\overline{\lambda}$ *и* $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{R}^n$, *а также число* $\lambda_0 \geq 0$, *что выполнено сопряженное уравнение* (3.86), *принцип максимума* (3.88), *а также соотношения* (3.91) *и* (3.92).

Бросается в глаза, что каждый из параметров $\overline{\lambda}$ и $\widetilde{\lambda}$ фигурирует только в одном соотношении из числа перечисленных в этом утверждении. Параметр $\overline{\lambda}$ фигурирует только в первом равенстве (3.91) $\overline{\lambda} = \psi(0)$, а $\widetilde{\lambda}$ – только во втором $\widetilde{\lambda} = -\psi(T)$. В соответствии с этими равенствами рассматривамемые параметры имеют смысл обозначений для значения функции $\psi(\cdot)$ в точке $t = 0$ и в точке $t = T$ соответственно. Однако эти обозначения, как мы заметили, нигде, кроме своего определения, не фигурируют, т.е. они не используются и не нужны. Поэтому о параметрах $\overline{\lambda}$ и $\widetilde{\lambda}$ и об определяющих их соотношениях можно забыть. Это позволяет сформулировать необходимые условия оптимальности короче.

Пусть процесс $[x^0(\cdot), u^0(\cdot)]$ *оптимален в рассматриваемой задаче. Тогда существует такая абсолютно непрерывная функция* $\psi(t) \in \mathbb{R}^n$ *переменной* $t \in [0, T]$ *и число* $\lambda_0 \geq 0$, *что выполнено сопряженное уравнение* (3.86), *принцип максимума* (3.88), *а также соотношения* (3.92).