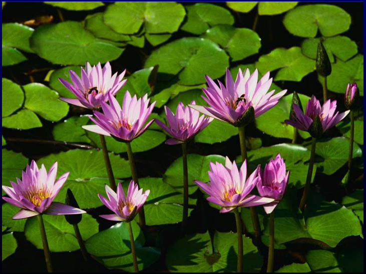
Гибридная динамика информационных и производственных потоков: Максимальный статический поток

Department of Theoretical Cybernetics,
Faculty of Mathematics and Mechanics,
Saint Petersburg University
Universitetskii pr.28, Petrodvoretz,
Saint Petersburg, Russia
almat1540@spb.edu



Определение монополюсной потоковой сети

Определение монополюсной потоковой сети

Монополюсная потоковая сеть

Определение монополюсной потоковой сети

Монополюсная потоковая сеть =

Определение монополюсной потоковой сети

Ориентированный граф

Монополюсная потоковая сеть

=

Определение монополюсной потоковой сети

Монополюсная потоковая сеть = Ориентированный граф

Емкость (пропускная способность) ветвей графа

Определение монополюсной потоковой сети

Монополюсная потоковая сеть = Ориентированный граф

Емкость (пропускная способность) ветвей графа

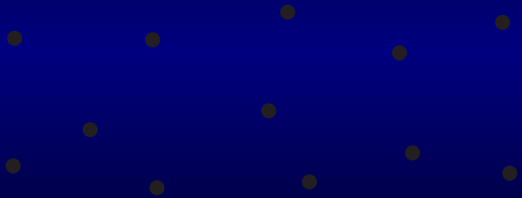
Источник и сток

Определение монополюсной потоковой сети

Ориентированный граф

=

Вершины, узлы, полюсы



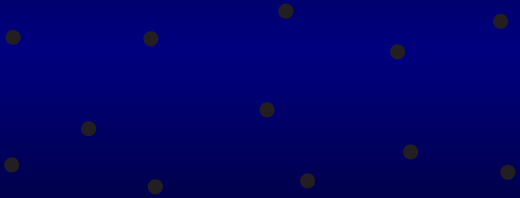
Определение монополюсной потоковой сети

Ориентированный граф

=

Вершины, узлы, полюсы

Процессоры, пункты перераспределения, станции перегрузки, ретрансляторы, процессоры, переключательные станции, расчетные центры

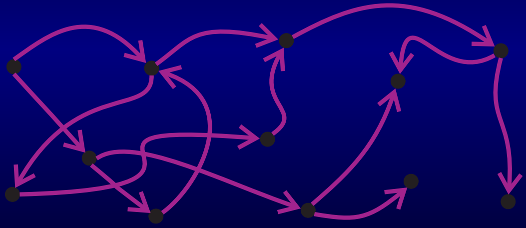


Определение монополюсной потоковой сети

Ориентированный граф

=

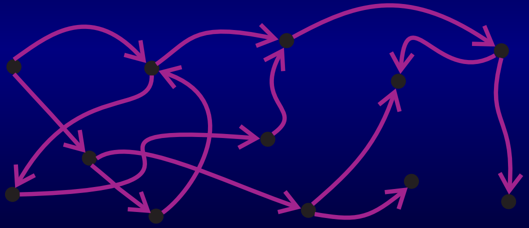
Ветви, дуги



Определение монополюсной потоковой сети

Ориентированный граф

=



Ветви, дуги

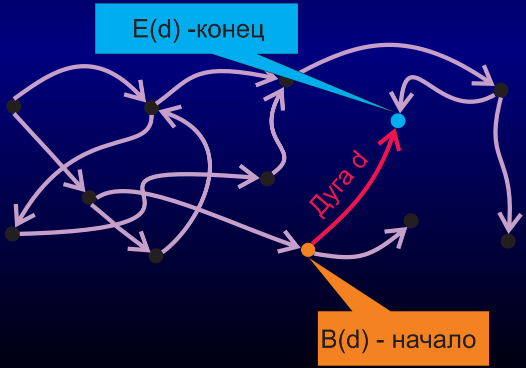
Транспортные пути, линии передачи

Определение монополюсной потоковой сети

Ориентированный граф

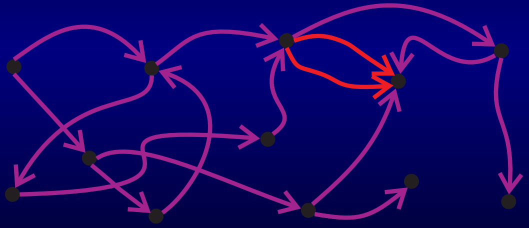
$=$

Дуга d имеет начало — вершину $B(d)$ — и конец — вершину $E(d)$. Дуга ориентирована из начала в вершину



Определение монополюсной потоковой сети

Ориентированный граф

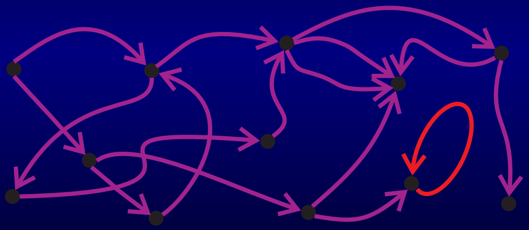


Несколько дуг могут иметь общие начала и концы. Они называются коллинеарными

Определение монополюсной потоковой сети

Ориентированный граф

=

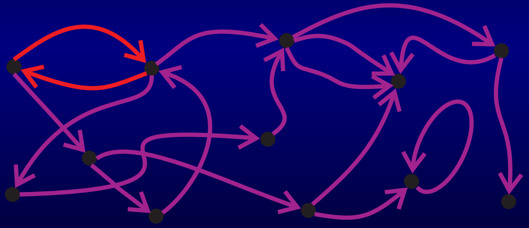


Конец дуги может совпадать с началом (self-loop)

Определение монополюсной потоковой сети

Ориентированный граф

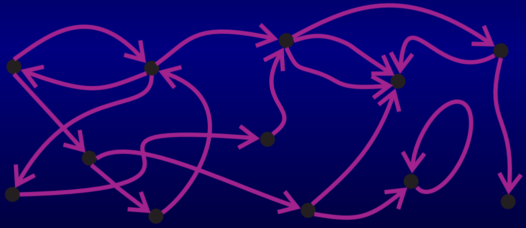
Возможны анти-коллениарные дуги



Определение монополюсной потоковой сети

Ориентированный граф

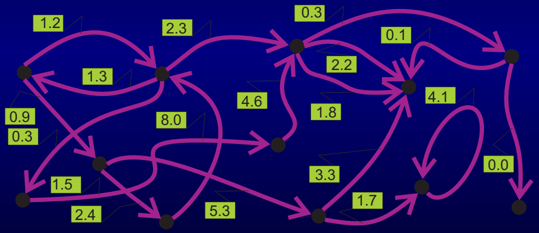
Ориентированный граф: Конечное множество вершин $N = \{n\}$ Конечное множество дуг $D = \{d\}$ Две функции $B(\cdot) : D \to N$ и $E(\cdot) : D \to N$



Определение монополюсной потоковой сети

= Емкость (пропускная способность) ветвей графа

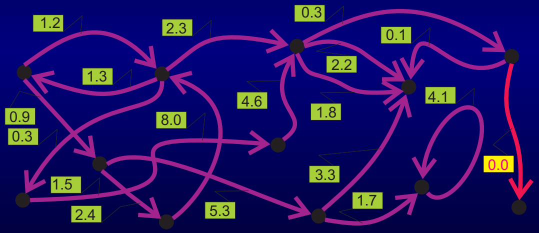
Для каждой дуги указана ее емкость (пропускная способность) $c_d, d \in D$: максимальная скорость, с которой работа может передаваться по дуге



Определение монополюсной потоковой сети

$=$ Емкость (пропускная способность) ветвей графа

Дуга может иметь нулевую емкость $c_d = 0$.

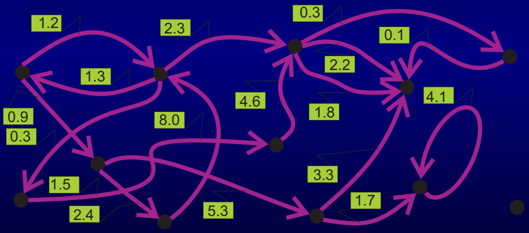


Определение монополюсной потоковой сети

=

Емкость (пропускная способность) ветвей графа

Дуга может иметь нулевую емкость $c_d = 0$. Тогда ее можно не учитывать

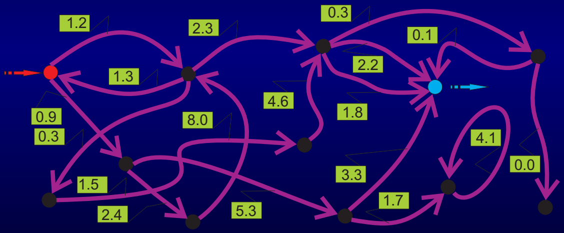


Определение монополюсной потоковой сети

—

Источник и сток

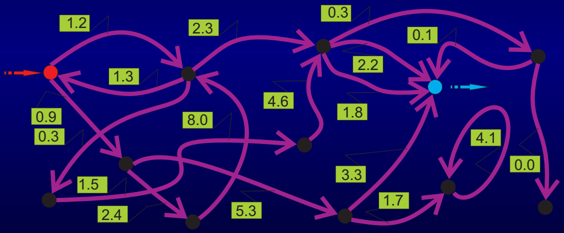
Источник и сток — два выделенных полюса (вершины) графа s (supplier) r (receiver)



Определение монополюсной потоковой сети

Источник и сток

Источник и сток — два выделенных полюса (вершины) графа s (supplier) r (receiver) $s \neq r$

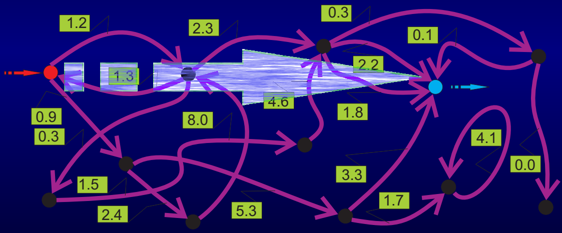


Определение монополюсной потоковой сети

Задача — организавать передачу по сети внешнего потока от источника к стоку.

Определение монополюсной потоковой сети

Источник и сток



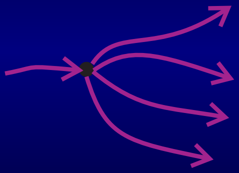
Внешний поток входит в сеть на источнике и выходит на стоке

Определение монополюсной потоковой сети

Монополюсная потоковая сеть =

- Ориентированный граф
- Емкость (пропускная способность) ветвей графа
- Источник и сток

При передаче по сети производится Дробление потоков на подпотоки, передаваемые по отдельным дугам

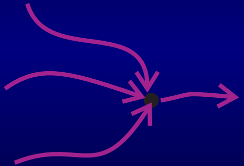


Определение монополюсной потоковой сети

Монополюсная потоковая сеть =

- Ориентированный граф
- Емкость (пропускная способность) ветвей графа
- Источник и сток

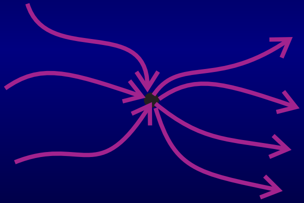
При передаче по сети производится Объединение подпотоков, пришедших по отдельным дугам



Определение монополюсной потоковой сети

Монополюсная потоковая сеть =

- Ориентированный граф
- Емкость (пропускная способность) ветвей графа
- Источник и сток



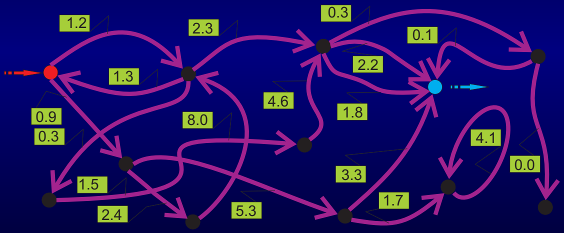
При передаче по сети производится

В общем случае: реорганизация входящих потоков в выходящие

Определение монополюсной потоковой сети

Монополюсная потоковая сеть =

- Ориентированный граф
- Емкость (пропускная способность) ветвей графа
- Источник и сток

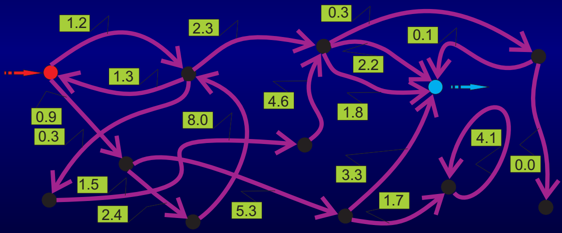


Задача:
как производить такую реорганизацию на каждом узле?

Определение монополюсной потоковой сети

Монополюсная потоковая сеть =

- Ориентированный граф
- Емкость (пропускная способность) ветвей графа
- Источник и сток

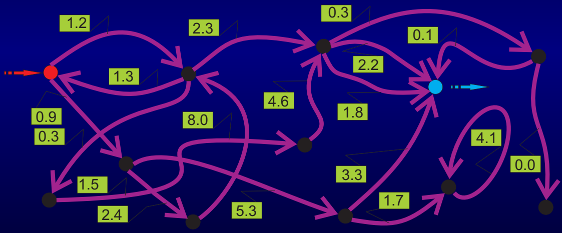


Какой подпоток пустить по каждой дуге?

Определение монополюсной потоковой сети

Монополюсная потоковая сеть =

- Ориентированный граф
- Емкость (пропускная способность) ветвей графа
- Источник и сток



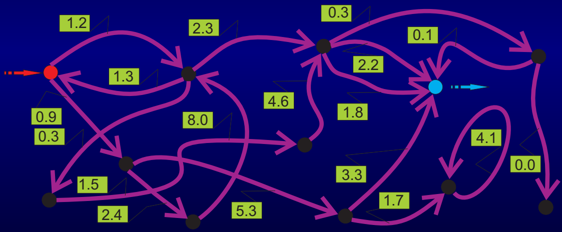
Какой мощности подпоток пустить по каждой дуге?

Определение монополюсной потоковой сети

Монополюсная потоковая сеть $=$

- Ориентированный граф
- Емкость (пропускная способность) ветвей графа
- Источник и сток

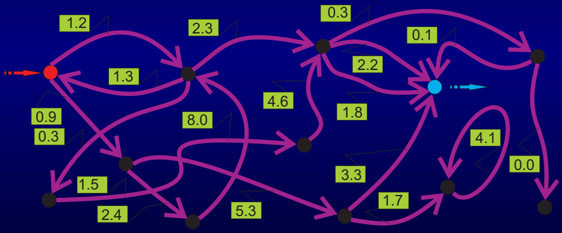
Вариант ответа $\equiv$ статический поток в сети



Определение монополюсной потоковой сети

Монополюсная потоковая сеть =

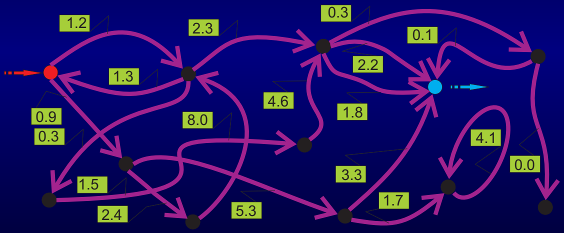
- Ориентированный граф
- Емкость (пропускная способность) ветвей графа
- Источник и сток



Определение монополюсной потоковой сети

Многополюсная потоковая сеть =

- Ориентированный граф
- Емкость (пропускная способность) ветвей графа
- Источник и сток

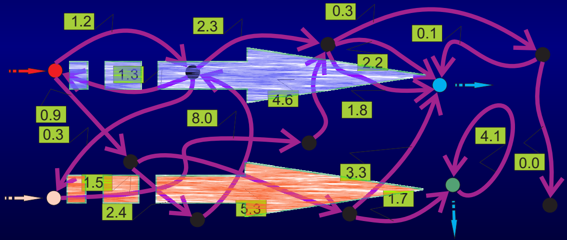


Определение монополюсной потоковой сети

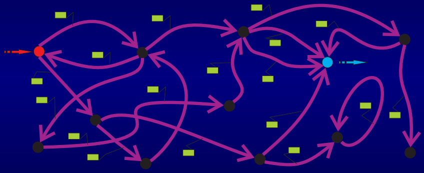
Многополюсная потоковая сеть = Ориентированный граф

Емкость (пропускная способность) ветвей графа

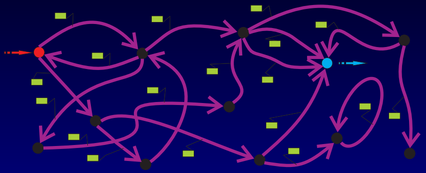
Много пар "источник-сток"



Определение статического потока в монополюсной сети

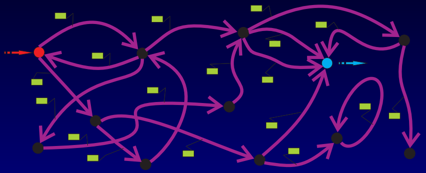


Определение статического потока в монополюсной сети



Вспомогательные определения.

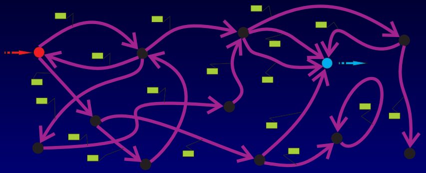
Определение статического потока в монополюсной сети



Вспомогательные определения.

- Внутренний узел — узел, отличный от источника и стока

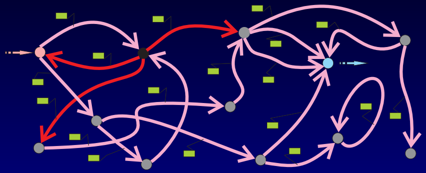
Определение статического потока в монополюсной сети



Вспомогательные определения.

- Внутренний узел — узел, отличный от источника и стока
- $A(n) := \{d \in D : B(d) = n\}$ — (After n) — множество дуг, исходящих из узла n

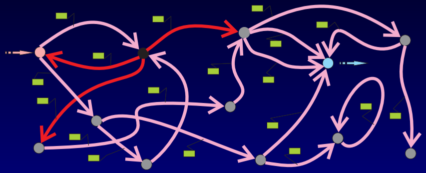
Определение статического потока в монополюсной сети



Вспомогательные определения.

- Внутренний узел — узел, отличный от источника и стока
- $A(n) := \{d \in D : B(d) = n\}$ — (After n) — множество дуг, исходящих из узла n

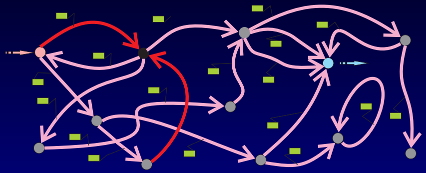
Определение статического потока в монополюсной сети



Вспомогательные определения.

- Внутренний узел — узел, отличный от источника и стока
- $A(n) := \{d \in D : B(d) = n\}$ — (After n) — множество дуг, исходящих из узла n
- $B(n) := \{d \in D : E(d) = n\}$ — (Before n) — множество дуг, входящих в узел n

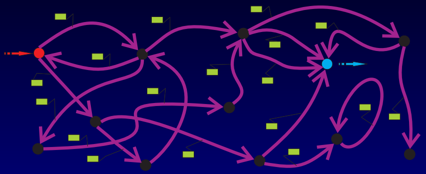
Определение статического потока в монополюсной сети



Вспомогательные определения.

- Внутренний узел — узел, отличный от источника и стока
- $A(n) := \{d \in D : B(d) = n\}$ — (After n) — множество дуг, исходящих из узла n
- $B(n) := \{d \in D : E(d) = n\}$ — (Before n) — множество дуг, входящих в узел n

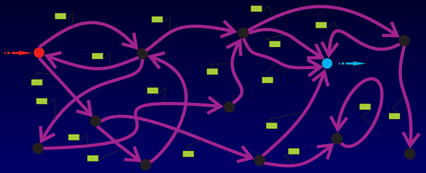
Определение статического потока в монополюсной сети



Вспомогательные определения.

- Внутренний узел — узел, отличный от источника и стока
- $A(n) := \{d \in D : B(d) = n\}$ — (After n) — множество дуг, исходящих из узла n
- $B(n) := \{d \in D : E(d) = n\}$ — (Before n) — множество дуг, входящих в узел n
- $Div_n(f) := \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d)$ — (Divergence) — Дивиргенция функции дуги $f : D \to [0, +\infty)$ на узле n

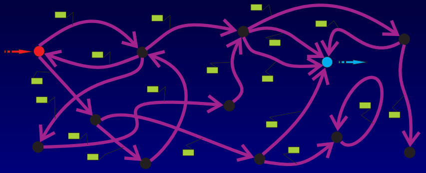
Определение статического потока в монополюсной сети



Вспомогательные определения.

- Внутренний узел — узел, отличный от источника и стока
- $A(n) := \{d \in D : B(d) = n\}$ — (After n) — множество дуг, исходящих из узла n
- $B(n) := \{d \in D : E(d) = n\}$ — (Before n) — множество дуг, входящих в узел n
- $Div_n(f) := \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d)$ Разность между суммарным исходящим из узла потоком и суммарным входящим в него потоком

Определение статического потока в монополюсной сети

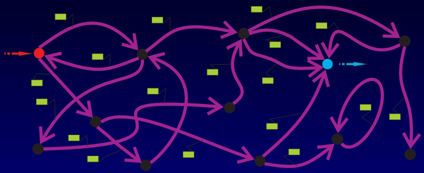


Теорема (Основное свойство дивиргенции)

Для любой функции дуги $f : D \to [0, +\infty)$ сумма дивиргенций по всем узлам равна нулю

$$\sum_{n:\text{все без исключения узлы}} Div_n(f) = 0$$

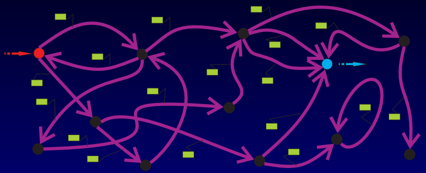
Определение статического потока в монополюсной сети



Доказательство:

$$\sum_n Div_n(f)$$

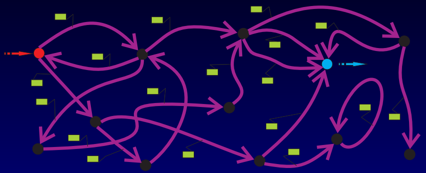
Определение статического потока в монополюсной сети



Доказательство:

$$\sum_n Div_n(f) \overset{\text{Определение дивиргенции}}{=\!=\!=} \sum_n \left(\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right)$$

Определение статического потока в монополюсной сети

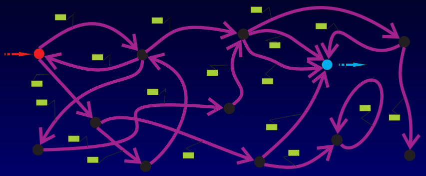


Доказательство:

$$\sum_n Div_n(f) \overset{\text{Определение дивиргенции}}{=\!=\!=\!=\!=} \sum_n \left(\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right)$$

$$= \sum_n \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_n \sum_{d \in B(n)} f(d)$$

Определение статического потока в монополюсной сети



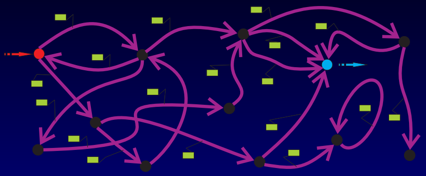
Доказательство:

$$\sum_n Div_n(f) \xlongequal{\text{Определение дивиргенции}} \sum_n \left(\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right)$$

$$= \sum_n \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_n \sum_{d \in B(n)} f(d)$$

$$= \sum_d \sum_{n: d \in A(n)} f(d) - \sum_d \sum_{n: d \in B(n)} f(d)$$

Определение статического потока в монополюсной сети



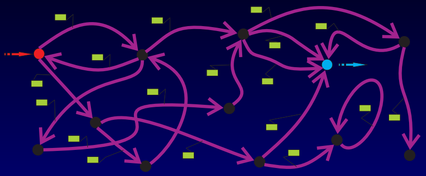
Доказательство:

$$\sum_n Div_n(f) \xlongequal{\text{Определение дивиргенции}} \sum_n \left(\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right)$$

$$= \sum_n \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_n \sum_{d \in B(n)} f(d)$$

$$= \sum_d \sum_{n: d \in A(n)} f(d) - \sum_d \sum_{n: d \in B(n)} f(d)$$

Определение статического потока в монополюсной сети



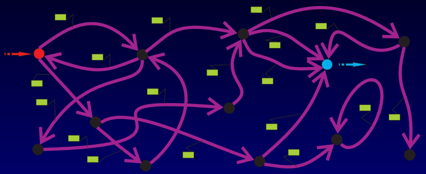
Доказательство:

$$\sum_n Div_n(f) \overset{\text{Определение дивиргенции}}{=\!=\!=\!=} \sum_n \left(\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right)$$

$$= \sum_n \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_n \sum_{d \in B(n)} f(d)$$

$$= \sum_d \sum_{n: B(d)=n} f(d) - \sum_d \sum_{n: d \in B(n)} f(d)$$

Определение статического потока в монополюсной сети



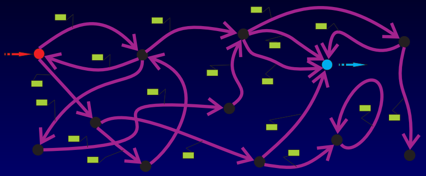
Доказательство:

$$\sum_n Div_n(f) \overset{\text{Определение дивиргенции}}{=\!=\!=\!=\!=} \sum_n \left(\sum_{d\in A(n)} f(d) - \sum_{d\in B(n)} f(d) \right)$$

$$= \sum_n \sum_{d\in A(n)} f(d) - \sum_n \sum_{d\in B(n)} f(d)$$

$$= \sum_d \sum_{n:B(d)=n\,\text{Есть равно одно такое } n} f(d) - \sum_d \sum_{n:d\in B(n)} f(d)$$

Определение статического потока в монополюсной сети



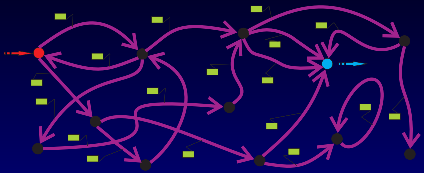
Доказательство:

$$\sum_n Div_n(f) \overset{\text{Определение дивиргенции}}{=\!=\!=\!=\!=} \sum_n \left(\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right)$$

$$= \sum_n \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_n \sum_{d \in B(n)} f(d)$$

$$= \sum_d f(d) - \sum_d \sum_{n: d \in B(n)} f(d)$$

Определение статического потока в монополюсной сети



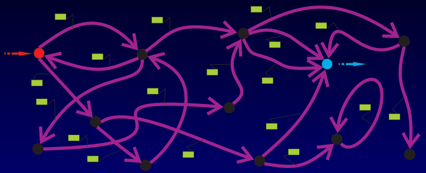
Доказательство:

$$\sum_n Div_n(f) \overset{\text{Определение дивиргенции}}{=\!=\!=\!=\!=} \sum_n \left(\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right)$$

$$= \sum_n \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_n \sum_{d \in B(n)} f(d)$$

$$= \sum_d f(d) - \sum_d f(d)$$

Определение статического потока в монополюсной сети



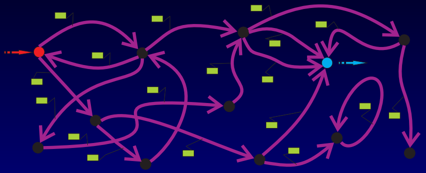
Доказательство:

$$\sum_n Div_n(f) \overset{\text{Определение дивиргенции}}{=\!=\!=} \sum_n \left(\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right)$$

$$= \sum_n \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_n \sum_{d \in B(n)} f(d)$$

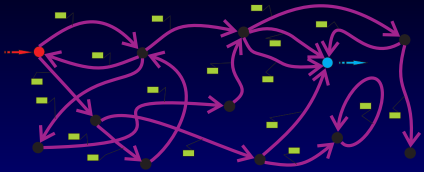
$$= \sum_d f(d) - \sum_d f(d) = 0$$

Определение статического потока в монополюсной сети



Определение статического потока в монополюсной сети

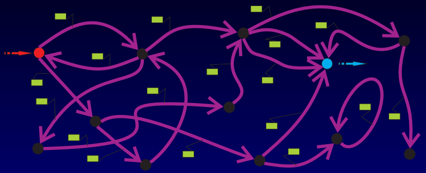
Определение статического потока в монополюсной сети



Определение статического потока в монополюсной сети

Статический поток — это вещественная функция дуги $f : D \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами

Определение статического потока в монополюсной сети

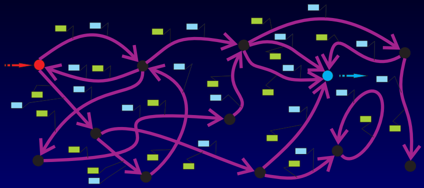


Определение статического потока в монополюсной сети

Статический поток — это вещественная функция дуги $f : D \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами

- $0 \leq f(d) \leq c_d$ — скорость подпотока по любой дуге неотрицателена (течет в направлении стрелки) и не превосходит емкости дуги

Определение статического потока в монополюсной сети

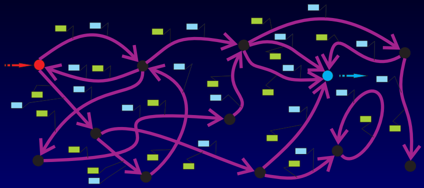


Определение статического потока в монополюсной сети

Статический поток — это вещественная функция дуги $f : D \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами

- $0 \leq f(d) \leq c_d$ — скорость подпотока по любой дуге неотрицателена (течет в направлении стрелки) и не превосходит емкости дуги

Определение статического потока в монополюсной сети

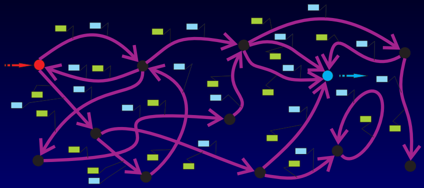


Определение статического потока в монополюсной сети

Статический поток — это вещественная функция дуги $f : D \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами

- $0 \leq f(d) \leq c_d$ — скорость подпотока по любой дуге неотрицателена (течет в направлении стрелки) и не превосходит емкости дуги
- Дивиргенция на любом внутреннем узле равна нулю: $Div_n(f) = 0$, если n — внутренний узел

Определение статического потока в монополюсной сети

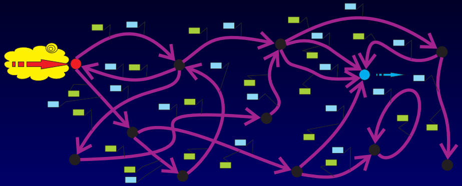


Определение статического потока в монополюсной сети

Статический поток — это вещественная функция дуги $f : D \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами

- $0 \leq f(d) \leq c_d$ — скорость подпотока по любой дуге неотрицателена (течет в направлении стрелки) и не превосходит емкости дуги
- Дивиргенция на любом внутреннем узле равна нулю: $Div_n(f) = 0$, если n — внутренний узел
- Дивиргенция источника неотрицательна $Div_s(f) \geq 0$

Определение статического потока в монополюсной сети

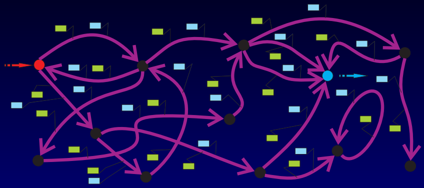


Определение статического потока в монополюсной сети

Статический поток — это вещественная функция дуги $f : D \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами

- $0 \leq f(d) \leq c_d$ — скорость подпотока по любой дуге неотрицателена (течет в направлении стрелки) и не превосходит емкости дуги
- Дивиргенция на любом внутреннем узле равна нулю: $Div_n(f) = 0$, если n — внутренний узел
- Дивиргенция источника неотрицательна $Div_s(f) \geq 0$ За счет внешнего потока из источника вытекает в сеть больше, чем притекает по ее дугам

Определение статического потока в монополюсной сети

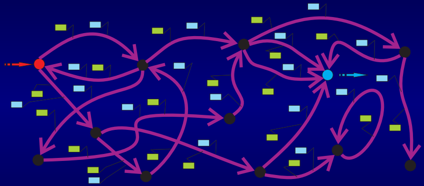


Определение статического потока в монополюсной сети

Статический поток — это вещественная функция дуги $f : D \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами

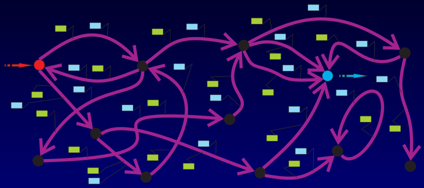
- $0 \leq f(d) \leq c_d$ — скорость подпотока по любой дуге неотрицателена (течет в направлении стрелки) и не превосходит емкости дуги
- Дивиргенция на любом внутреннем узле равна нулю: $Div_n(f) = 0$, если n — внутренний узел
- Дивиргенция источника неотрицательна $Div_s(f) \geq 0$ За счет внешнего потока из источника вытекает в сеть больше, чем притекает по ее дугам

Определение статического потока в монополюсной сети



Определение мощности статического потока

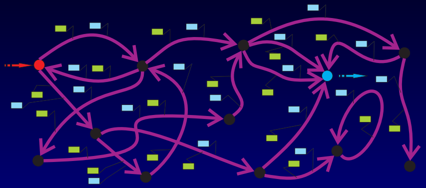
Определение статического потока в монополюсной сети



Определение мощности статического потока

Следствие из основного свойства дивиргенции

Определение статического потока в монополюсной сети



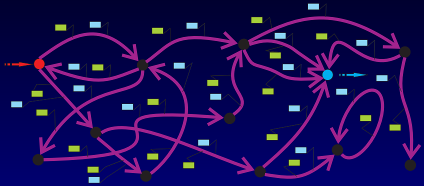
Определение мощности статического потока

Следствие из основного свойства дивиргенции

Лемма

Для любого статического потока сумма дивиргенций источника и стока равна нулю $Div_s(f) + Div_r(f) = 0$

Определение статического потока в монополюсной сети



Определение мощности статического потока

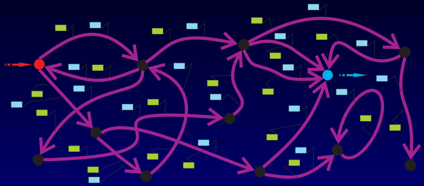
Следствие из основного свойства дивиргенции

Лемма

Для любого статического потока сумма дивиргенций источника и стока равна нулю $Div_s(f) + Div_r(f) = 0$

$$0 = \sum_n Div_n(f)$$

Определение статического потока в монополюсной сети



Определение мощности статического потока

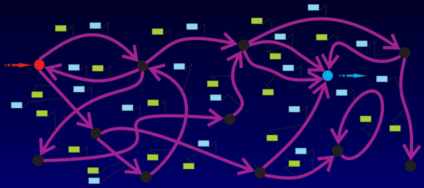
Следствие из основного свойства дивиргенции

Лемма

Для любого статического потока сумма дивиргенций источника и стока равна нулю $Div_s(f) + Div_r(f) = 0$

$$0 = \sum_{n} Div_n(f) = Div_s(f) + \sum_{n-\text{внутренний узел}} Div_n(f) + Div_r(f)$$

Определение статического потока в монополюсной сети



Определение мощности статического потока

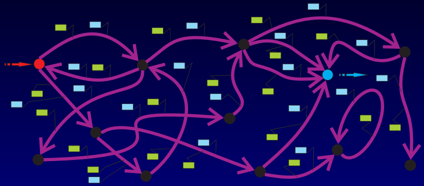
Следствие из основного свойства дивиргенции

Лемма

Для любого статического потока сумма дивиргенций источника и стока равна нулю $Div_s(f) + Div_r(f) = 0$

$$0 = \sum_n Div_n(f) = Div_s(f) + \sum_{n-\text{внутренний узел}} \underbrace{Div_n(f)}_{=0} + Div_r(f)$$

Определение статического потока в монополюсной сети



Определение мощности статического потока

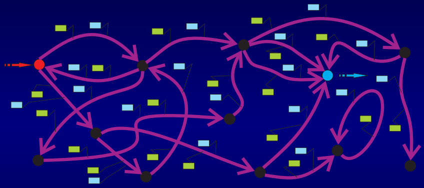
Следствие из основного свойства дивиргенции

Лемма

Для любого статического потока сумма дивиргенций источника и стока равна нулю $Div_s(f) + Div_r(f) = 0$

$$0 = \sum_n Div_n(f) = Div_s(f) + Div_r(f)$$

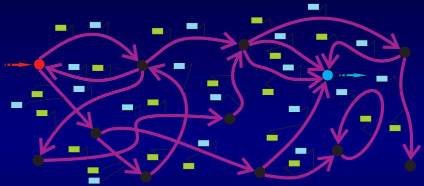
Определение статического потока в монополюсной сети



Определение мощности статического потока

Следствия

Определение статического потока в монополюсной сети

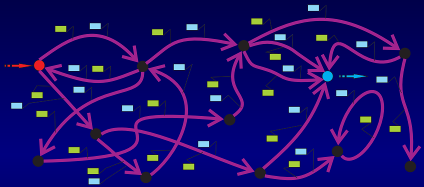


Определение мощности статического потока

Следствия

Для любого статического потока $Div_s(f) = -Div_r(f) \geq 0$

Определение статического потока в монополюсной сети

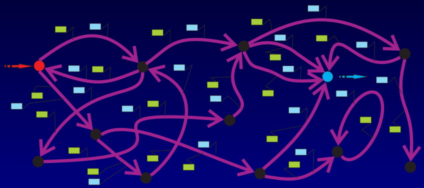


Определение мощности статического потока

Следствия

Эта величина $W(f) := Div_s(f) = -Div_r(f) \geq 0$ называется мощностью потока

Определение статического потока в монополюсной сети

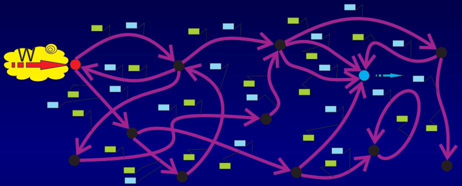


Определение мощности статического потока

Следствия

Эта величина $W(f) := Div_s(f) = -Div_r(f) \geq 0$ называется мощностью потока Она показывает, насколько суммарный поток, вытекающий из источника в сеть, превосходит суммарный поток, притекающий в источник по дугам сети.

Определение статического потока в монополюсной сети

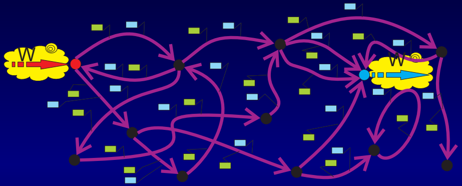


Определение мощности статического потока

Следствия

Иными словами, сколько притекает в источник извне сети.

Определение статического потока в монополюсной сети

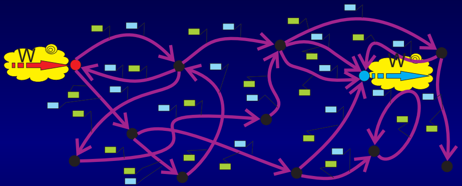


Определение мощности статического потока

Следствия

Иными словами, сколько притекает в источник извне сети. Аналогично, она показывает, сколько вытекает из стока вовне сети.

Определение статического потока в монополюсной сети

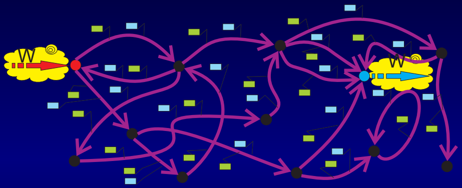


Определение мощности статического потока

Следствия

Точнее, речь идет о скоростях притекания и вытекания

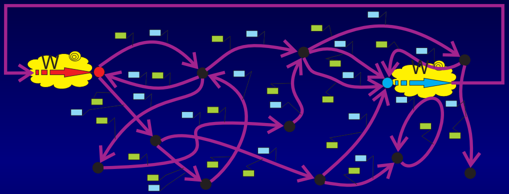
Определение статического потока в монополюсной сети



Циркуляцией

называется статический поток нулевой мощности $W(f) = 0$

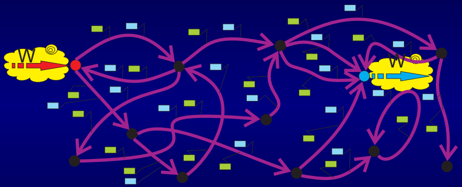
Определение статического потока в монополюсной сети



Циркуляцией

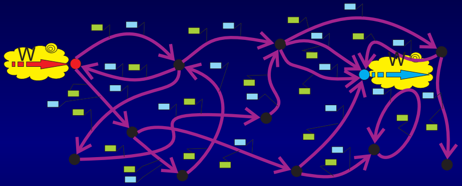
называется статический поток нулевой мощности $W(f) = 0$
Любой статический поток можно превратить в циркуляцию, если внести в сеть еще одну дугу от стока к источнику и направить по ней подпоток мощности $W(f)$

Определение статического потока в монополюсной сети



Обсуждение определения

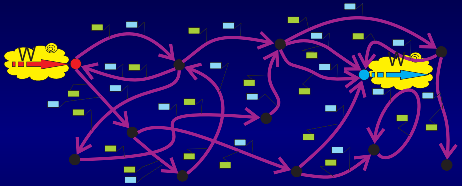
Определение статического потока в монополюсной сети



Обсуждение определения

Почему на внутреннем узле суммарная скорость входящих потоков должна равнятся суммарной скорости выходящих потоков?

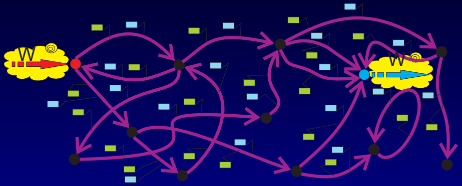
Определение статического потока в монополюсной сети



Обсуждение определения

Обычно на узле имеется возможность буферирования (складирования).

Определение статического потока в монополюсной сети

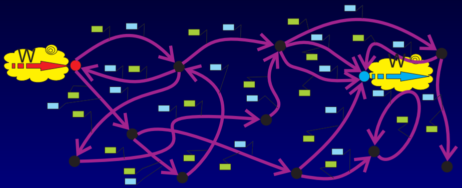


Обсуждение определения

Уравнения баланса на внутреннем узле n

$$\sum_{d \in A(n)} x_d(t) = \sum_{d \in B(n)} x_d(t) + Buf_n(t)$$

Определение статического потока в монополюсной сети



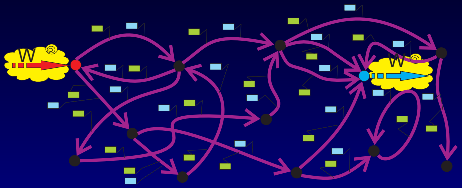
Обсуждение определения

Уравнения баланса на внутреннем узле n

$$\sum_{d \in A(n)} x_d(t) = \sum_{d \in B(n)} x_d(t) + Buf_n(t)$$

где

Определение статического потока в монополюсной сети



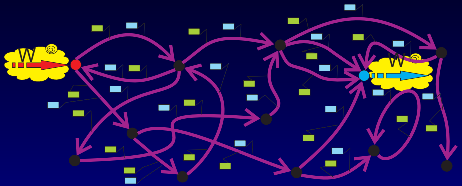
Обсуждение определения

Уравнения баланса на внутреннем узле n

$$\sum_{d \in A(n)} x_d(t) = \sum_{d \in B(n)} x_d(t) + Buf_n(t)$$

где
$x_d(t)$ — общий объем работы, перемещенной по дуге d за время t

Определение статического потока в монополюсной сети



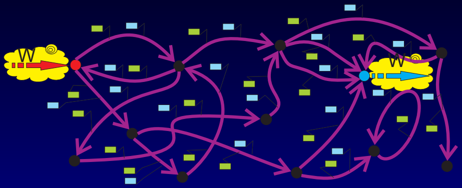
Обсуждение определения

Уравнения баланса на внутреннем узле n

$$\sum_{d \in A(n)} x_d(t) = \sum_{d \in B(n)} x_d(t) + Buf_n(t)$$

где
$x_d(t)$ — общий объем работы, перемещенной по дуге d за время t
$Buf_n(t)$— алгебраическое изменение содержимого буфера узла за время t.

Определение статического потока в монополюсной сети



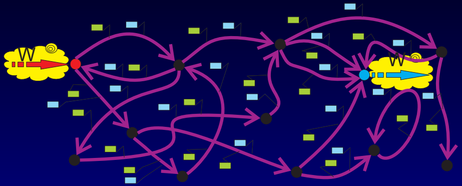
Обсуждение определения

Уравнения баланса на внутреннем узле n

$$\sum_{d \in A(n)} x_d(t) = \sum_{d \in B(n)} x_d(t) + Buf_n(t)$$

где
$x_d(t)$ — общий объем работы, перемещенной по дуге d за время t
$Buf_n(t)$— алгебраическое изменение содержимого буфера узла за время t. При этом $|Buf_n(t)| \leq const \; \forall t$.

Определение статического потока в монополюсной сети



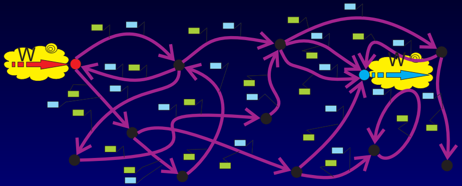
Обсуждение определения

Уравнения баланса на внутреннем узле n

$$\frac{1}{t}\sum_{d\in A(n)} x_d(t) = \frac{1}{t}\sum_{d\in B(n)} x_d(t) + \frac{1}{t}Buf_n(t)$$

где
$x_d(t)$ — общий объем работы, перемещенной по дуге d за время t
$Buf_n(t)$— алгебраическое изменение содержимого буфера узла за время t. При этом $|Buf_n(t)| \leq const\ \forall t$.

Определение статического потока в монополюсной сети



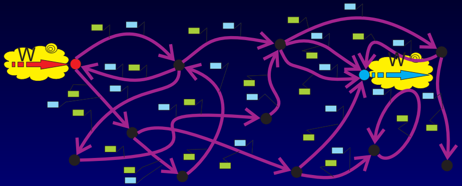
Обсуждение определения

Уравнения баланса на внутреннем узле n

$$\sum_{d \in A(n)} \frac{1}{t} x_d(t) = \sum_{d \in B(n)} \frac{1}{t} x_d(t) + \frac{1}{t} Buf_n(t)$$

где
$x_d(t)$ — общий объем работы, перемещенной по дуге d за время t
$Buf_n(t)$— алгебраическое изменение содержимого буфера узла за время t. При этом $|Buf_n(t)| \leq const \; \forall t$.

Определение статического потока в монополюсной сети



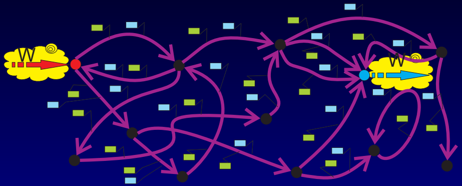
Обсуждение определения

Уравнения баланса на внутреннем узле n

$$\sum_{d\in A(n)} \frac{1}{t} x_d(t) = \sum_{d\in B(n)} \frac{1}{t} x_d(t) + \frac{1}{t} Buf_n(t) \qquad t \to \infty$$

где
$x_d(t)$ — общий объем работы, перемещенной по дуге d за время t
$Buf_n(t)$— алгебраическое изменение содержимого буфера узла за время t. При этом $|Buf_n(t)| \leq const\ \forall t$.

Определение статического потока в монополюсной сети



Обсуждение определения

Уравнения баланса на внутреннем узле n

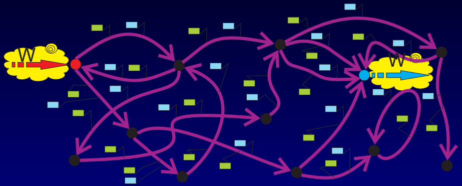
$$\sum_{d \in A(n)} v_d = \sum_{d \in B(n)} v_d + \frac{1}{t} Buf_n(t) \qquad t \to \infty$$

где

v_d — средняя скорость перемещения работы по дуге

$Buf_n(t)$— алгебраическое изменение содержимого буфера узла за время t. При этом $|Buf_n(t)| \leq const\ \forall t$.

Определение статического потока в монополюсной сети



Обсуждение определения

Уравнения баланса на внутреннем узле n

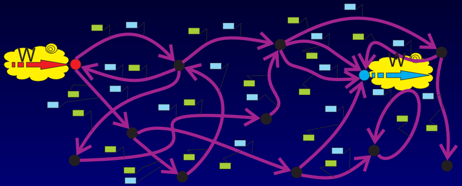
$$\sum_{d \in A(n)} v_d = \sum_{d \in B(n)} v_d + \frac{1}{t} Buf_n(t) \qquad t \to \infty$$

где

v_d — средняя скорость перемещения работы по дуге

$Buf_n(t)$— алгебраическое изменение содержимого буфера узла за время t. При этом $|Buf_n(t)| \leq const \; \forall t$.

Определение статического потока в монополюсной сети



Обсуждение определения

Уравнения баланса на внутреннем узле n

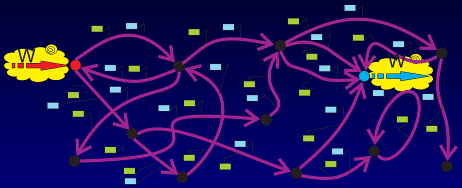
$$\sum_{d\in A(n)} v_d = \sum_{d\in B(n)} v_d + \frac{1}{t} Buf_n(t) \qquad t \to \infty$$

где

v_d — средняя скорость перемещения работы по дуге

$Buf_n(t)$— алгебраическое изменение содержимого буфера узла за время t. При этом $|Buf_n(t)| \leq const \ \forall t$.

Определение статического потока в монополюсной сети



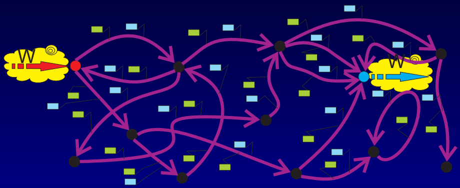
Обсуждение определения

Уравнения баланса на внутреннем узле n

$$\sum_{d \in A(n)} v_d = \sum_{d \in B(n)} v_d$$

где
v_d — средняя скорость перемещения работы по дуге
$Buf_n(t)$— алгебраическое изменение содержимого буфера узла за время t. При этом $|Buf_n(t)| \leq const \ \forall t$.

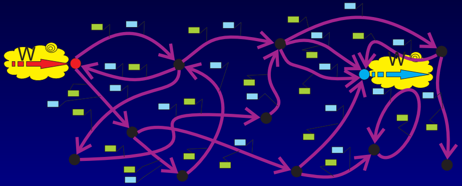
Определение статического потока в монополюсной сети



Обсуждение определения

Выводы:

Определение статического потока в монополюсной сети

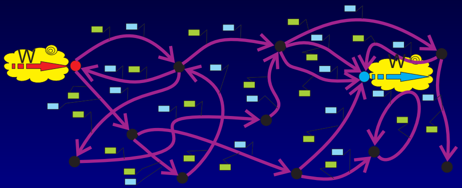


Обсуждение определения

Выводы:

- Статический поток обычно оперирует скоростями, средними за длительный интервал времени

Определение статического потока в монополюсной сети



Обсуждение определения

Выводы:

- Статический поток обычно оперирует скоростями, средними за длительный интервал времени
- Его изучение обычно связано со стратегическим анализом и планированием

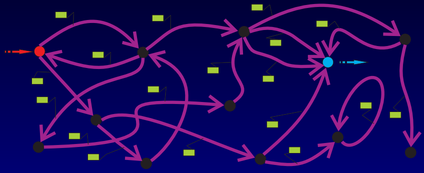
Определение максимального статического потока и его существование

Определение максимального статического потока и его существование

Задана монополюсная потоковая сеть

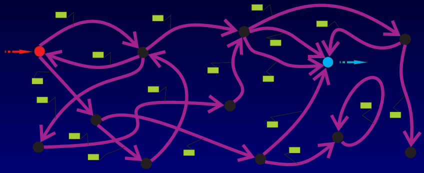
Определение максимального статического потока и его существование

Задана монополюсная потоковая сеть



Определение максимального статического потока и его существование

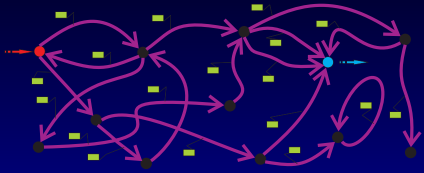
Задана монополюсная потоковая сеть



F — совокупность всех статических потоков в этой сети

Определение максимального статического потока и его существование

Задана монополюсная потоковая сеть



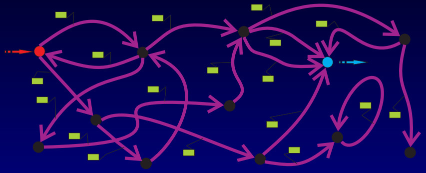
F — совокупность всех статических потоков в этой сети

Определение

Поток $f^0 \in F$ называется максимальным, если $W(f^0) = \max_{f \in F} W(f)$.

Определение максимального статического потока и его существование

Задана монополюсная потоковая сеть



F — совокупность всех статических потоков в этой сети

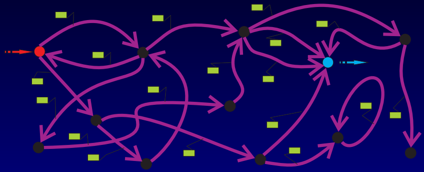
Определение

Поток $f^0 \in F$ называется максимальным, если $W(f^0) = \max_{f \in F} W(f)$.

- Чему равен максимальный статический поток?

Определение максимального статического потока и его существование

Задана монополюсная потоковая сеть



F — совокупность всех статических потоков в этой сети

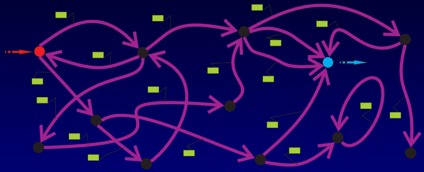
Определение

Поток $f^0 \in F$ называется максимальным, если $W(f^0) = \max_{f \in F} W(f)$.

- Чему равен максимальный статический поток?
- Где узкие места сети?

Определение максимального статического потока и его существование

Задана монополюсная потоковая сеть



F — совокупность всех статических потоков в этой сети

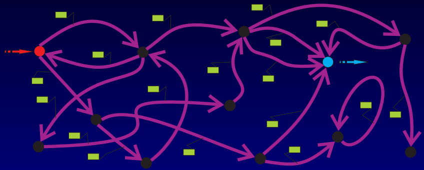
Определение

Поток $f^0 \in F$ называется максимальным, если
$W(f^0) = \max_{f \in F} W(f)$.

- Чему равен максимальный статический поток?
- Где узкие места сети? Емкости каких дуг надо увеличивать, чтобы увеличить общую пропускную способность сети от источника к стоку?

Определение максимального статического потока и его существование

Задана монополюсная потоковая сеть



F — совокупность всех статических потоков в этой сети

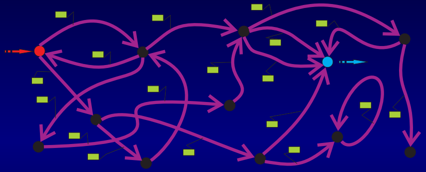
Определение

Поток $f^0 \in F$ называется максимальным, если $W(f^0) = \max_{f \in F} W(f)$.

- Чему равен максимальный статический поток?
- Где узкие места сети? Емкости каких дуг надо увеличивать, чтобы увеличить общую пропускную способность сети от источника к стоку? Какие новые дуги имеет смысл добавить для достижения той же цели?

Определение максимального статического потока и его существование

Задана монополюсная потоковая сеть



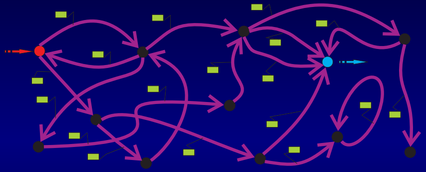
F — совокупность всех статических потоков в этой сети

Лемма

Максимальный статический поток существует

Определение максимального статического потока и его существование

Задана монополюсная потоковая сеть



F — совокупность всех статических потоков в этой сети

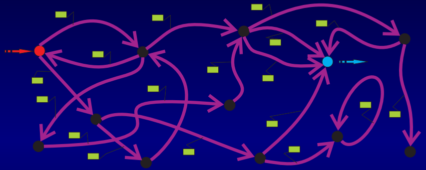
Лемма

Максимальный статический поток существует

Пронумеруем дуги $D = \{d_1, \ldots, d_s\}$

Определение максимального статического потока и его существование

Задана монополюсная потоковая сеть



F — совокупность всех статических потоков в этой сети

Лемма

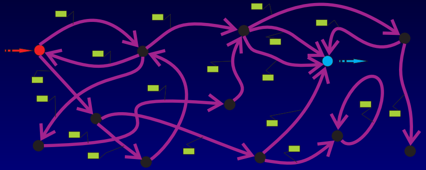
Максимальный статический поток существует

Пронумеруем дуги $D = \{d_1, \ldots, d_s\}$

Вещественная функция дуги $f : D \to \mathbb{R} \leftrightarrow f = (f_1, \ldots, f_s) \in \mathbb{R}^s$

Определение максимального статического потока и его существование

Задана монополюсная потоковая сеть



F — совокупность всех статических потоков в этой сети

Лемма

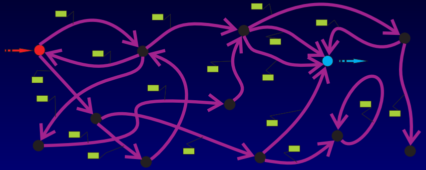
Максимальный статический поток существует

Пронумеруем дуги $D = \{d_1, \ldots, d_s\}$
Вещественная функция дуги $f : D \to \mathbb{R} \leftrightarrow f = (f_1, \ldots, f_s) \in \mathbb{R}^s$

$$F = \Big\{ f : 0 \le f_i \le c_{d_i} \ \forall i, \quad \sum_{i: d_i \in A(n)} f_i = \sum_{i: d_i \in B(n)} f_i \ \text{ для любого внутреннего узла } n \Big\}$$

Определение максимального статического потока и его существование

Задана монополюсная потоковая сеть



F — совокупность всех статических потоков в этой сети

Лемма

Максимальный статический поток существует

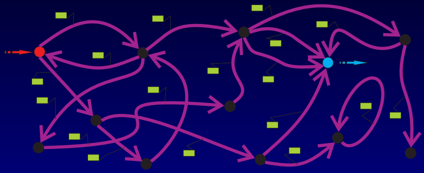
Пронумеруем дуги $D = \{d_1, \dots, d_s\}$
Вещественная функция дуги $f : D \to \mathbb{R} \leftrightarrow f = (f_1, \dots, f_s) \in \mathbb{R}^s$

$$F = \Big\{ f : 0 \le f_i \le c_{d_i} \ \forall i, \quad \sum_{i: d_i \in A(n)} f_i = \sum_{i: d_i \in B(n)} f_i \quad \text{для любого внутреннего узла } n \Big\}$$

F выделяется из компактного множества (гипер-параллелепипеда) системой линейных уравнений

Определение максимального статического потока и его существование

Задана монополюсная потоковая сеть



F — совокупность всех статических потоков в этой сети

Лемма

Максимальный статический поток существует

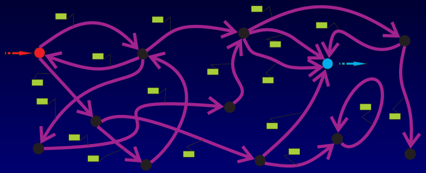
Пронумеруем дуги $D = \{d_1, \ldots, d_s\}$
Вещественная функция дуги $f : D \to \mathbb{R} \leftrightarrow f = (f_1, \ldots, f_s) \in \mathbb{R}^s$

$$F = \Big\{ f : 0 \leq f_i \leq c_{d_i} \ \forall i, \\ \sum_{i: d_i \in A(n)} f_i = \sum_{i: d_i \in B(n)} f_i \quad \text{для любого внутреннего узла } n \Big\}$$

F компактно

Определение максимального статического потока и его существование

Задана монополюсная потоковая сеть



F — совокупность всех статических потоков в этой сети

Лемма

Максимальный статический поток существует

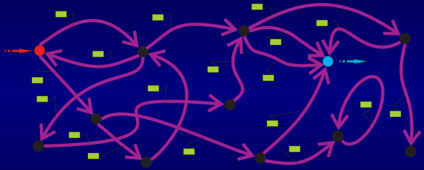
Пронумеруем дуги $D = \{d_1, \ldots, d_s\}$
Вещественная функция дуги $f : D \to \mathbb{R} \leftrightarrow f = (f_1, \ldots, f_s) \in \mathbb{R}^s$

$$F = \left\{ f : 0 \le f_i \le c_{d_i} \ \forall i, \right.$$
$$\left. \sum_{i:d_i \in A(n)} f_i = \sum_{i:d_i \in B(n)} f_i \quad \text{для любого внутреннего узла } n \right\}$$

F компактно Функция $f \mapsto W(f) = \sum_{i:d_i \in A(s)} f_i - \sum_{i:d_i \in B(s)} f_i$ непрерывна

Определение максимального статического потока и его существование

Задана монополюсная потоковая сеть

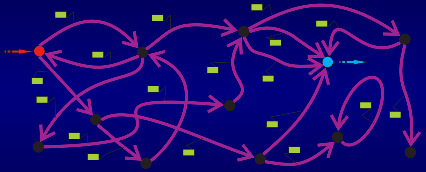


F — совокупность всех статических потоков в этой сети

Теорема Вейерштрасса: непрерывная функция на компактном множестве достигает максимального значения

Определение максимального статического потока и его существование

Задана монополюсная потоковая сеть

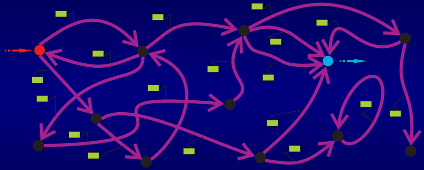


F — совокупность всех статических потоков в этой сети

Функция $W(f)$ достигает максимума на множестве статических потоков F

Определение максимального статического потока и его существование

Задана монополюсная потоковая сеть



F — совокупность всех статических потоков в этой сети

Найти максимальный статический поток ≡ решить задачу линейного программирования

Определение разреза

Определение разреза

Определение

Разрез — это разбиение множества вершин на упорядоченную пару подмножеств — снабжающее S и принимающее R — такие, что

Определение разреза

Определение

Разрез — это разбиение множества вершин на упорядоченную пару подмножеств — снабжающее S и принимающее R — такие, что

- Источник принадлежит снабжающему множеству $s \in S$

Определение разреза

Определение

Разрез — это разбиение множества вершин на упорядоченную пару подмножеств — снабжающее S и принимающее R — такие, что

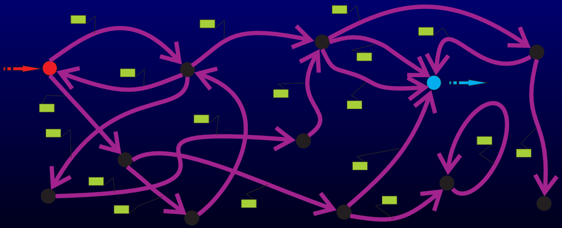
- Источник принадлежит снабжающему множеству $s \in S$
- Сток принадлежит принимающему множеству $r \in R$

Определение разреза

Определение

Разрез — это разбиение множества вершин на упорядоченную пару подмножеств — снабжающее S и принимающее R — такие, что

- Источник принадлежит снабжающему множеству $s \in S$
- Сток принадлежит принимающему множеству $r \in R$

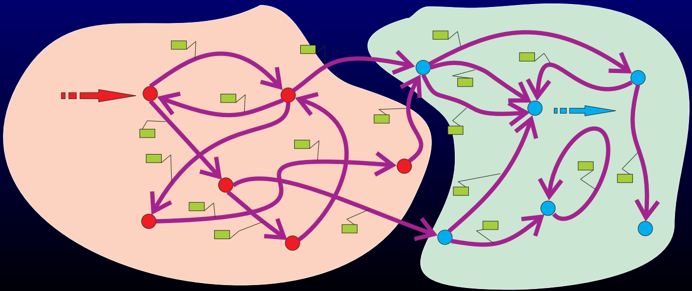


Определение разреза

Определение

Разрез — это разбиение множества вершин на упорядоченную пару подмножеств — снабжающее S и принимающее R — такие, что

- Источник принадлежит снабжающему множеству $s \in S$
- Сток принадлежит принимающему множеству $r \in R$

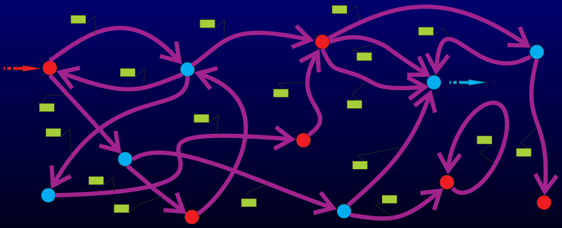


Определение разреза

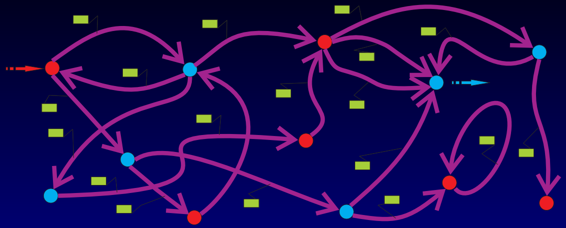
Определение

Разрез — это разбиение множества вершин на упорядоченную пару подмножеств — снабжающее S и принимающее R — такие, что

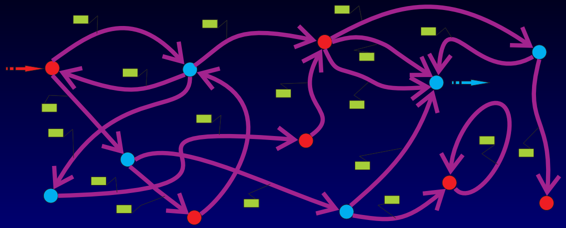
- Источник принадлежит снабжающему множеству $s \in S$
- Сток принадлежит принимающему множеству $r \in R$



Емкость разреза

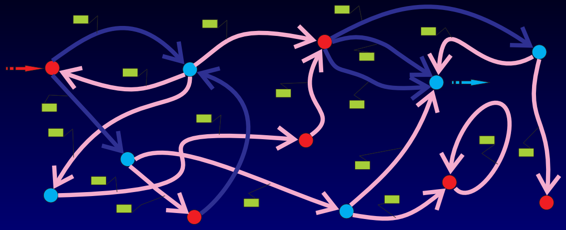


Емкость разреза



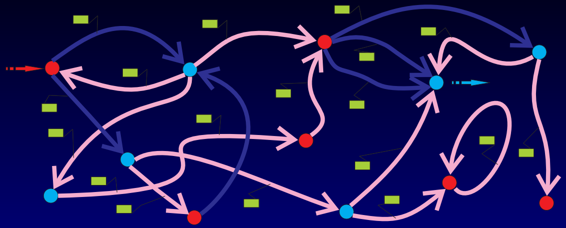
- Прямой мост через разрез (S, R) — дуга d с началом в $S \ni B(d)$ и концом в $R \ni E(d)$

Емкость разреза



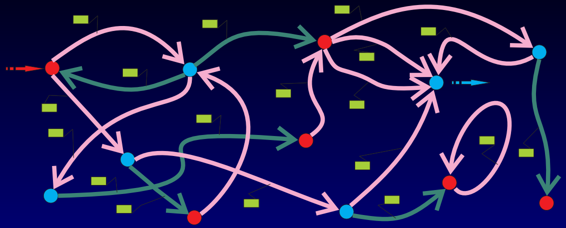
- Прямой мост через разрез (S, R) — дуга d с началом в $S \ni B(d)$ и концом в $R \ni E(d)$

Емкость разреза



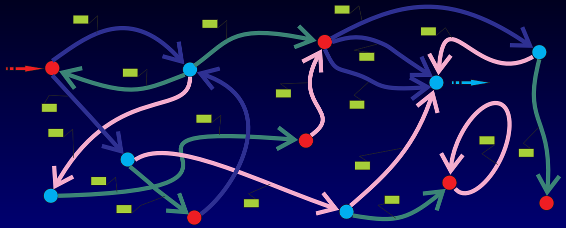
- Прямой мост через разрез (S, R) — дуга d с началом в $S \ni B(d)$ и концом в $R \ni E(d)$
- Обратный мост через разрез (S, R) — дуга d с началом в $R \ni B(d)$ и концом в $S \ni E(d)$

Емкость разреза



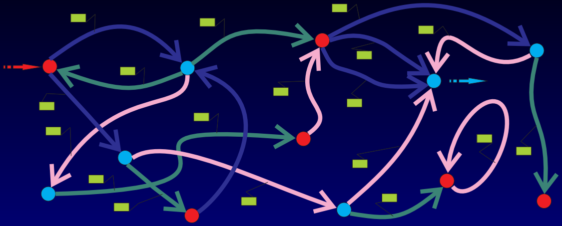
- Прямой мост через разрез (S, R) — дуга d с началом в $S \ni B(d)$ и концом в $R \ni E(d)$
- Обратный мост через разрез (S, R) — дуга d с началом в $R \ni B(d)$ и концом в $S \ni E(d)$

Емкость разреза



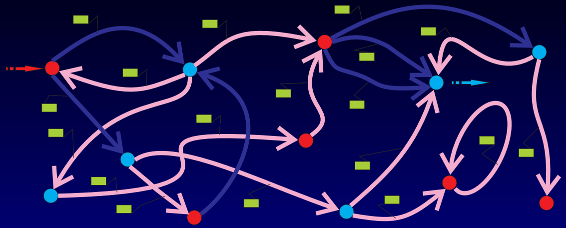
- Прямой мост через разрез (S, R) — дуга d с началом в $S \ni B(d)$ и концом в $R \ni E(d)$
- Обратный мост через разрез (S, R) — дуга d с началом в $R \ni B(d)$ и концом в $S \ni E(d)$

Емкость разреза



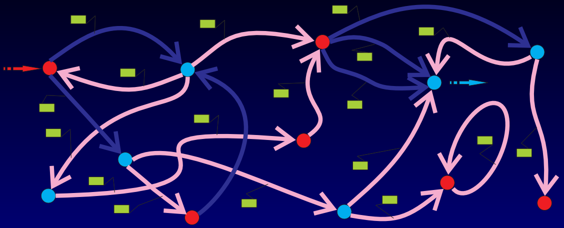
- Прямой мост через разрез (S, R) — дуга d с началом в $S \ni B(d)$ и концом в $R \ni E(d)$
- Обратный мост через разрез (S, R) — дуга d с началом в $R \ni B(d)$ и концом в $S \ni E(d)$
- Оставшиеся дуги называются внутренними (для разреза)

Емкость разреза



- Прямой мост через разрез (S, R) — дуга d с началом в $S \ni B(d)$ и концом в $R \ni E(d)$
- Обратный мост через разрез (S, R) — дуга d с началом в $R \ni B(d)$ и концом в $S \ni E(d)$
- Оставшиеся дуги называются внутренними (для разреза)
- Емкость разреза — это сумма емкостей всех прямых мостов $C(S, R) := \sum_{d \text{ прямой мост}} c_d$

Емкость разреза



- Прямой мост через разрез (S, R) — дуга d с началом в $S \ni B(d)$ и концом в $R \ni E(d)$
- Обратный мост через разрез (S, R) — дуга d с началом в $R \ni B(d)$ и концом в $S \ni E(d)$
- Оставшиеся дуги называются внутренними (для разреза)
- Емкость разреза — это сумма емкостей всех прямых мостов $C(S, R) := \sum_{d \text{ прямой мост}} c_d := 0$, если прямых мостов нет

Теорема Форда-Фулкенсона

Теорема Форда-Фулкенсона

Определение

Разрез (S_m, R_m) называется минимальным, если он имеет наименьшую по сравнению со всеми другими разрезами емкость

Теорема Форда-Фулкенсона

Определение

Разрез (S_m, R_m) называется минимальным, если он имеет наименьшую по сравнению со всеми другими разрезами емкость

$$C(S_m, R_m) = \min_{(S,R)-\text{разрез}} C(S, R).$$

Теорема Форда-Фулкенсона

Определение

Разрез (S_m, R_m) называется минимальным, если он имеет наименьшую по сравнению со всеми другими разрезами емкость

$$C(S_m, R_m) = \min_{(S,R)-\text{разрез}} C(S, R).$$

Максимальный статический поток равен емкости минимального разреза:

Теорема Форда-Фулкенсона

Определение

Разрез (S_m, R_m) называется минимальным, если он имеет наименьшую по сравнению со всеми другими разрезами емкость

$$C(S_m, R_m) = \min_{(S,R)-\text{разрез}} C(S, R).$$

Максимальный статический поток равен емкости минимального разреза:

$$\max_{f-\text{статический поток}} W(f) = \min_{(S,R)-\text{разрез}} C(S, R).$$

Теорема Форда-Фулкенсона

Определение

Разрез (S_m, R_m) называется минимальным, если он имеет наименьшую по сравнению со всеми другими разрезами емкость

$$C(S_m, R_m) = \min_{(S,R)-\text{разрез}} C(S, R).$$

Максимальный статический поток равен емкости минимального разреза:

$$\max_{f-\text{статический поток}} W(f) = \min_{(S,R)-\text{разрез}} C(S, R).$$

Для того, чтобы увеличить поток, нужно либо

Теорема Форда-Фулкенсона

Определение

Разрез (S_m, R_m) называется минимальным, если он имеет наименьшую по сравнению со всеми другими разрезами емкость

$$C(S_m, R_m) = \min_{(S,R)-\text{разрез}} C(S, R).$$

Максимальный статический поток равен емкости минимального разреза:

$$\max_{f-\text{статический поток}} W(f) = \min_{(S,R)-\text{разрез}} C(S, R).$$

Для того, чтобы увеличить поток, нужно либо

- Увеличить емкость одного или нескольких прямых мостов через минимальный разрез либо

Теорема Форда-Фулкенсона

Определение

Разрез (S_m, R_m) называется минимальным, если он имеет наименьшую по сравнению со всеми другими разрезами емкость

$$C(S_m, R_m) = \min_{(S,R)-\text{разрез}} C(S, R).$$

Максимальный статический поток равен емкости минимального разреза:

$$\max_{f-\text{статический поток}} W(f) = \min_{(S,R)-\text{разрез}} C(S, R).$$

Для того, чтобы увеличить поток, нужно либо

- Увеличить емкость одного или нескольких прямых мостов через минимальный разрез либо
- Добавить дополнительные прямые мосты через минимальный разрез

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

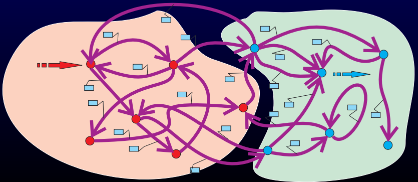
Определение

Пусть f — статический поток и (S, R) — разрез.

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Определение

Пусть f — статический поток и (S, R) — разрез.



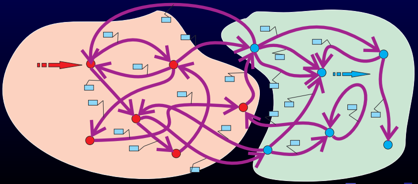
Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Определение

Пусть f — статический поток и (S, R) — разрез.

- Мощность прямого потока через разрез — сумма потоков по всех прямым мостам через разрез

$$W^{+}(f|S,R) := \sum_{d:\text{прямой мост}} f(d)$$



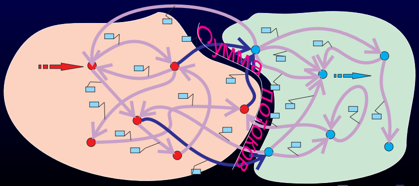
Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Определение

Пусть f — статический поток и (S, R) — разрез.

- Мощность прямого потока через разрез — сумма потоков по всех прямым мостам через разрез

$$W^+(f|S, R) := \sum_{d:\text{прямой мост}} f(d)$$



Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Определение

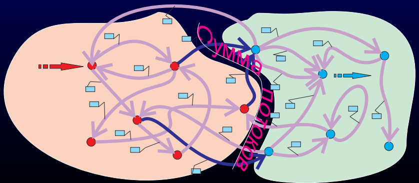
Пусть f — статический поток и (S, R) — разрез.

- Мощность прямого потока через разрез — сумма потоков по всех прямым мостам через разрез

$$W^{+}(f|S,R) := \sum_{d:\text{прямой мост}} f(d)$$

- Мощность обратного потока через разрез — сумма потоков по всех обратным мостам через разрез

$$W^{-}(f|S,R) := \sum_{d:\text{обратный мост}} f(d)$$



Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Определение

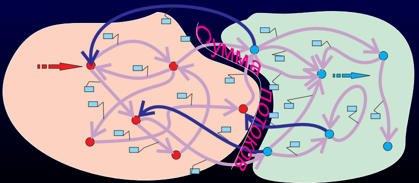
Пусть f — статический поток и (S, R) — разрез.

- Мощность прямого потока через разрез — сумма потоков по всех прямым мостам через разрез

$$W^{+}(f|S,R) := \sum_{d:\text{прямой мост}} f(d)$$

- Мощность обратного потока через разрез — сумма потоков по всех обратным мостам через разрез

$$W^{-}(f|S,R) := \sum_{d:\text{обратный мост}} f(d)$$



Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

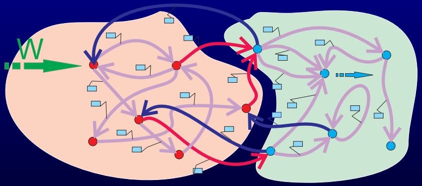
$$W(f) = W^{+}(f|S, R) - W^{-}(f|S, R)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

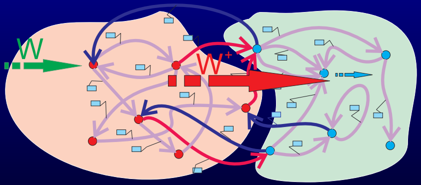


Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

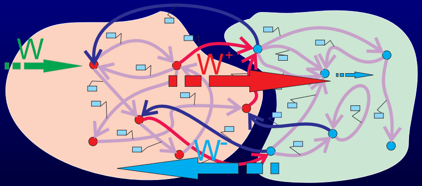


Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$



Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S, R) - W^{-}(f|S, R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Доказательство: Определение мощности потока

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S, R) - W^{-}(f|S, R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n \in S} \mathrm{Div}_n(f)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S, R) - W^{-}(f|S, R)$$

Доказательство: Так как $\mathrm{Div}_n(f) = 0 \; \forall n \in S, n \neq s$ по определению потока и $s \in S$ по определению разреза

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n \in S} \mathrm{Div}_n(f)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n \in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n \in S} \left[\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right]$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Доказательство: По определению дивиргенции

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n \in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n \in S} \left[\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right]$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n \in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n \in S} \left[\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right]$$

$$\sum_{n \in S} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{n \in S} \sum_{d \in B(n)} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n \in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n \in S} \left[\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right]$$

$$\sum_{n \in S} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{n \in S} \sum_{d \in B(n)} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^+(f|S,R) - W^-(f|S,R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n\in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n\in S}\left[\sum_{d\in A(n)} f(d) - \sum_{d\in B(n)} f(d)\right]$$

$$\sum_{n\in S}\sum_{n=B(d)} f(d) - \sum_{n\in S}\sum_{d\in B(n)} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^+(f|S,R) - W^-(f|S,R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n \in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n \in S} \left[\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right]$$

$$\sum_{n \in S} \sum_{n = B(d)} f(d) - \sum_{n \in S} \sum_{n = E(d)} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n \in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n \in S} \left[\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right]$$

$$\sum_{n \in S} \sum_{n = B(d)} f(d) - \sum_{n \in S} \sum_{n = E(d)} f(d) = \sum_{d : B(d) \in S}$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^+(f|S,R) - W^-(f|S,R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n \in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n \in S} \left[\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right]$$

$$\sum_{n \in S} \sum_{n = B(d)} f(d) - \sum_{n \in S} \sum_{n = E(d)} f(d) = \sum_{d : B(d) \in S} \sum_{n : n = B(d)} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n\in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n\in S}\left[\sum_{d\in A(n)} f(d) - \sum_{d\in B(n)} f(d)\right]$$

$$\sum_{n\in S}\sum_{n=B(d)} f(d) - \sum_{n\in S}\sum_{n=E(d)} f(d) = \sum_{d:B(d)\in S} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n\in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n\in S}\left[\sum_{d\in A(n)} f(d) - \sum_{d\in B(n)} f(d)\right]$$

$$\sum_{n\in S}\sum_{n=B(d)} f(d) - \sum_{n\in S}\sum_{n=E(d)} f(d) = \sum_{d:B(d)\in S} f(d) - \sum_{d:E(d)\in S} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^+(f|S,R) - W^-(f|S,R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n\in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n\in S}\left[\sum_{d\in A(n)} f(d) - \sum_{d\in B(n)} f(d)\right]$$

$$\sum_{n\in S}\sum_{n=B(d)} f(d) - \sum_{n\in S}\sum_{n=E(d)} f(d) = \sum_{d:B(d)\in S} f(d) - \sum_{d:E(d)\in S} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^+(f|S,R) - W^-(f|S,R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n\in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n\in S}\left[\sum_{d\in A(n)} f(d) - \sum_{d\in B(n)} f(d)\right]$$

$$\sum_{n\in S}\sum_{n=B(d)} f(d) - \sum_{n\in S}\sum_{n=E(d)} f(d) = \sum_{d:B(d)\in S} f(d) - \sum_{d:E(d)\in S} f(d)$$

$$\sum_{d-\text{прямой мост}} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n\in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n\in S} \left[\sum_{d\in A(n)} f(d) - \sum_{d\in B(n)} f(d) \right]$$

$$\sum_{n\in S} \sum_{n=B(d)} f(d) - \sum_{n\in S} \sum_{n=E(d)} f(d) = \sum_{d:B(d)\in S} f(d) - \sum_{d:E(d)\in S} f(d)$$

$$\sum_{\substack{d-\text{прямой}\\ \text{мост}}} f(d) + \sum_{\substack{d-\text{внут-}\\ \text{ренняя в } S\\ \text{дуга}}} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^+(f|S,R) - W^-(f|S,R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n\in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n\in S}\left[\sum_{d\in A(n)} f(d) - \sum_{d\in B(n)} f(d)\right]$$

$$\sum_{n\in S}\sum_{n=B(d)} f(d) - \sum_{n\in S}\sum_{n=E(d)} f(d) = \sum_{d:B(d)\in S} f(d) - \sum_{d:E(d)\in S} f(d)$$

$$\sum_{d-\text{прямой мост}} f(d) + \sum_{d-\text{внутренняя в } S \text{ дуга}} f(d) - \sum_{d-\text{внутренняя в } S \text{ дуга}} f(d) - \sum_{d-\text{обратный мост}} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n\in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n\in S}\left[\sum_{d\in A(n)} f(d) - \sum_{d\in B(n)} f(d)\right]$$

$$\sum_{n\in S}\sum_{n=B(d)} f(d) - \sum_{n\in S}\sum_{n=E(d)} f(d) = \sum_{d:B(d)\in S} f(d) - \sum_{d:E(d)\in S} f(d)$$

$$\sum_{d-\text{прямой мост}} f(d) + \sum_{d-\text{внутренняя в } S \text{ дуга}} f(d) - \sum_{d-\text{внутренняя в } S \text{ дуга}} f(d) - \sum_{d-\text{обратный мост}} f(d)$$

$$= W^{+}(f|S,R)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^+(f|S,R) - W^-(f|S,R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n \in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n \in S} \left[\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right]$$

$$\sum_{n \in S} \sum_{n = B(d)} f(d) - \sum_{n \in S} \sum_{n = E(d)} f(d) = \sum_{d : B(d) \in S} f(d) - \sum_{d : E(d) \in S} f(d)$$

$$\sum_{\substack{d-\text{прямой}\\ \text{мост}}} f(d) + \sum_{\substack{d-\text{внут-}\\ \text{ренняя в } S\\ \text{дуга}}} f(d) - \sum_{\substack{d-\text{внут-}\\ \text{ренняя в } S\\ \text{дуга}}} f(d) - \sum_{\substack{d-\text{обратный}\\ \text{мост}}} f(d)$$

$$= W^+(f|S,R) + 0$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n \in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n \in S} \left[\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right]$$

$$\sum_{n \in S} \sum_{n = B(d)} f(d) - \sum_{n \in S} \sum_{n = E(d)} f(d) = \sum_{d : B(d) \in S} f(d) - \sum_{d : E(d) \in S} f(d)$$

$$\sum_{\substack{d-\text{прямой}\\ \text{мост}}} f(d) + \sum_{\substack{d-\text{внут-}\\ \text{ренняя в } S\\ \text{дуга}}} f(d) - \sum_{\substack{d-\text{внут-}\\ \text{ренняя в } S\\ \text{дуга}}} f(d) - \sum_{\substack{d-\text{обратный}\\ \text{мост}}} f(d)$$

$$= W^{+}(f|S,R) + 0 - W^{-}(f|S,R)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Доказательство:

$$W(f) = \mathrm{Div}_s(f) = \sum_{n \in S} \mathrm{Div}_n(f) = \sum_{n \in S} \left[\sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) \right]$$

$$\sum_{n \in S} \sum_{n = B(d)} f(d) - \sum_{n \in S} \sum_{n = E(d)} f(d) = \sum_{d : B(d) \in S} f(d) - \sum_{d : E(d) \in S} f(d)$$

$$\sum_{\substack{d-\text{прямой}\\ \text{мост}}} f(d) + \sum_{\substack{d-\text{внут-}\\ \text{ренняя в } S\\ \text{дуга}}} f(d) - \sum_{\substack{d-\text{внут-}\\ \text{ренняя в } S\\ \text{дуга}}} f(d) - \sum_{\substack{d-\text{обратный}\\ \text{мост}}} f(d)$$

$$= W^{+}(f|S,R) + 0 - W^{-}(f|S,R)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Следствия:

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Следствия:

- Мощность потока не превосходит емкости разреза

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Следствия:

- Мощность потока не превосходит емкости разреза

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Следствия:

- Мощность потока не превосходит емкости разреза

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R) = \sum_{\substack{\text{прямые}\\\text{мосты}}} \underbrace{f(d)} - \sum_{\substack{\text{обратные}\\\text{мосты}}} \underbrace{f(d)}$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Следствия:

- Мощность потока не превосходит емкости разреза
  По определению потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R) = \sum_{\substack{\text{прямые} \\ \text{мосты}}} \underbrace{f(d)} - \sum_{\substack{\text{обратные} \\ \text{мосты}}} \underbrace{f(d)}$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^+(f|S,R) - W^-(f|S,R)$$

Следствия:

- Мощность потока не превосходит емкости разреза
  По определению потоков через разрез

$$W(f) = W^+(f|S,R) - W^-(f|S,R) = \sum_{\substack{\text{прямые}\\\text{мосты}}} \underbrace{f(d)}_{\leq c_d} - \sum_{\substack{\text{обратные}\\\text{мосты}}} \underbrace{f(d)}_{\geq 0}$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^+(f|S,R) - W^-(f|S,R)$$

Следствия:

- Мощность потока не превосходит емкости разреза
  По определению потока

$$W(f) = W^+(f|S,R) - W^-(f|S,R) = \sum_{\substack{\text{прямые}\\\text{мосты}}} \underbrace{f(d)}_{\le c_d} - \sum_{\substack{\text{обратные}\\\text{мосты}}} \underbrace{f(d)}_{\ge 0}$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Следствия:

- Мощность потока не превосходит емкости разреза
  По определению потока

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R) = \sum_{\substack{\text{прямые}\\ \text{мосты}}} \underbrace{f(d)}_{\leq c_d} - \sum_{\substack{\text{обратные}\\ \text{мосты}}} \underbrace{f(d)}_{\geq 0}$$

$$\leq \sum_{\substack{\text{прямые}\\ \text{мосты}}} c_d$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Следствия:

- Мощность потока не превосходит емкости разреза
  По определению потока

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R) = \sum_{\substack{\text{прямые}\\\text{мосты}}} \underbrace{f(d)}_{\leq c_d} - \sum_{\substack{\text{обратные}\\\text{мосты}}} \underbrace{f(d)}_{\geq 0}$$

$$\leq \sum_{\substack{\text{прямые}\\\text{мосты}}} c_d = C(S,R)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Следствия:

- Мощность потока не превосходит емкости разреза
  По определению емкости разреза

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R) = \sum_{\substack{\text{прямые}\\\text{мосты}}} \underbrace{f(d)}_{\leq c_d} - \sum_{\substack{\text{обратные}\\\text{мосты}}} \underbrace{f(d)}_{\geq 0}$$

$$\leq \sum_{\substack{\text{прямые}\\\text{мосты}}} c_d = C(S,R)$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^+(f|S,R) - W^-(f|S,R)$$

Следствия:

- Мощность потока не превосходит емкости разреза
- Максимальный статический поток не превосходит емкости минимального разреза

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Следствия:

- Мощность потока не превосходит емкости разреза
- Максимальный статический поток не превосходит емкости минимального разреза

$$\max_{f-\text{статический поток}} W(f) \leq \min_{(S,R)-\text{разрез}} C(S,R).$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Следствия:

- Мощность потока не превосходит емкости разреза
- Максимальный статический поток не превосходит емкости минимального разреза

$$\max_{f\text{—статический поток}} W(f) \leq \min_{(S,R)\text{—разрез}} C(S,R).$$

- Для доказательства теоремы Форда-Фулкенсона осталось обосновать противоположное неравенство

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Следствия:

- Мощность потока не превосходит емкости разреза
- Максимальный статический поток не превосходит емкости минимального разреза
- Для доказательства теоремы Форда-Фулкенсона осталось обосновать противоположное неравенство

$$W(f^0) = C(S,R) \quad \text{для хотя бы одного разреза}$$

где f^0 максимальный статический поток

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Следствия:

- Мощность потока не превосходит емкости разреза
- Максимальный статический поток не превосходит емкости минимального разреза
- Для доказательства теоремы Форда-Фулкенсона осталось обосновать противоположное неравенство

$$W(f^{0}) = C(S,R) \quad \text{для хотя бы одного разреза}$$

- $\exists$ разрез: $W(f) = C(S,R)$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^+(f|S,R) - W^-(f|S,R)$$

Следствия:

- Мощность потока не превосходит емкости разреза
- Максимальный статический поток не превосходит емкости минимального разреза
- Для доказательства теоремы Форда-Фулкенсона осталось обосновать противоположное неравенство

$$W(f^0) = C(S,R) \quad \text{для хотя бы одного разреза}$$

- $\exists$ разрез: $W(f) = C(S,R) \Leftrightarrow f = f^0 \Leftrightarrow$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^{+}(f|S,R) - W^{-}(f|S,R)$$

Следствия:

- Мощность потока не превосходит емкости разреза
- Максимальный статический поток не превосходит емкости минимального разреза
- Для доказательства теоремы Форда-Фулкенсона осталось обосновать противоположное неравенство

$$W(f^0) = C(S,R) \quad \text{для хотя бы одного разреза}$$

- $\exists$ разрез: $W(f) = C(S,R) \Leftrightarrow f = f^0 \Leftrightarrow$

$$\exists \text{ разрез}: \begin{array}{l} f(d) = c_d \text{ для прямых мостов } d, \\ f(d) = 0 \text{ для обратных мостов } d \end{array}$$

Доказательство теоремы Форда Фулкенсона

Лемма

Мощность $W(f)$ потока f равна разности мощности прямого и обратного потоков через разрез

$$W(f) = W^+(f|S,R) - W^-(f|S,R)$$

Следствия:

- Мощность потока не превосходит емкости разреза
- Максимальный статический поток не превосходит емкости минимального разреза
- Для доказательства теоремы Форда-Фулкенсона осталось обосновать противоположное неравенство

$$W(f^0) = C(S,R) \quad \text{для хотя бы одного разреза}$$

- $\exists$ разрез: $W(f) = C(S,R) \Leftrightarrow f = f^0 \Leftrightarrow$

$$\exists \text{ разрез} : \begin{array}{l} f(d) = c_d \text{ для прямых мостов } d, \\ f(d) = 0 \text{ для обратных мостов } d \end{array}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Определение

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Определение

- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Определение

- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Определение

- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.
- Пусть задан поток f. Касающаяся дуга d называется насыщенной для узла n, если

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Определение

- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.
- Пусть задан поток f. Касающаяся дуга d называется насыщенной для узла n, если

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Определение

- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.
- Пусть задан поток f. Касающаяся дуга d называется насыщенной для узла n, если
  - $f(d) = 0$, если дуга — входящая в узел

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Определение

- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.
- Пусть задан поток f. Касающаяся дуга d называется насыщенной для узла n, если
  - $f(d) = 0$, если дуга — входящая в узел

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

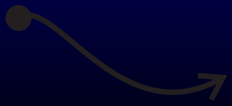
Определение

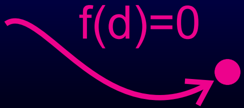
- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.
- Пусть задан поток f. Касающаяся дуга d называется насыщенной для узла n, если
  - $f(d) = 0$, если дуга — входящая в узел

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Определение

- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.
- Пусть задан поток f. Касающаяся дуга d называется насыщенной для узла n, если
  - $f(d) = 0$, если дуга — входящая в узел
  - $f(d) = c_d$, в противном случае





Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Определение

- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.
- Пусть задан поток f. Касающаяся дуга d называется насыщенной для узла n, если
  - $f(d) = 0$, если дуга — входящая в узел
  - $f(d) = c_d$, в противном случае

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Определение

- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.
- Пусть задан поток f. Касающаяся дуга d называется насыщенной для узла n, если
  - $f(d) = 0$, если дуга — входящая в узел
  - $f(d) = c_d$, в противном случае
- Пусть задан поток f. Окрестность узла n — совокупность всех узлов n_*, соединенных с n хотя бы одной ненасыщенной для узла n дугой d

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Определение

- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.
- Пусть задан поток f. Касающаяся дуга d называется насыщенной для узла n, если
  - $f(d) = 0$, если дуга — входящая в узел
  - $f(d) = c_d$, в противном случае
- Пусть задан поток f. Окрестность узла n — совокупность всех узлов n_*, соединенных с n хотя бы одной ненасыщенной для узла n дугой d

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

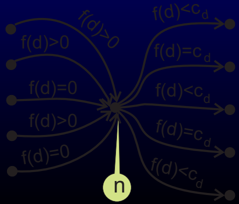
Определение

- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.
- Пусть задан поток f. Касающаяся дуга d называется насыщенной для узла n, если
  - $f(d) = 0$, если дуга — входящая в узел
  - $f(d) = c_d$, в противном случае
- Пусть задан поток f. Окрестность узла n — совокупность всех узлов n_*, соединенных с n хотя бы одной ненасыщенной для узла n дугой d
  - Дуга соединяет узлы $\equiv$ касательна обоим узлам

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Определение

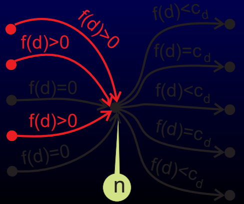
- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.
- Пусть задан поток f. Касающаяся дуга d называется насыщенной для узла n, если
  - $f(d) = 0$, если дуга — входящая в узел
  - $f(d) = c_d$, в противном случае
- Пусть задан поток f. Окрестность узла n — совокупность всех узлов n_*, соединенных с n хотя бы одной ненасыщенной для узла n дугой d
  - Дуга соединяет узлы $\equiv$ касательна обоим узлам



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Определение

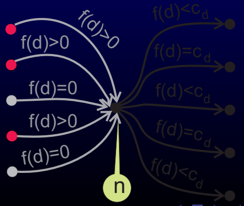
- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.
- Пусть задан поток f. Касающаяся дуга d называется насыщенной для узла n, если
  - $f(d) = 0$, если дуга — входящая в узел
  - $f(d) = c_d$, в противном случае
- Пусть задан поток f. Окрестность узла n — совокупность всех узлов n_*, соединенных с n хотя бы одной ненасыщенной для узла n дугой d
  - Дуга соединяет узлы $\equiv$ касательна обоим узлам



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Определение

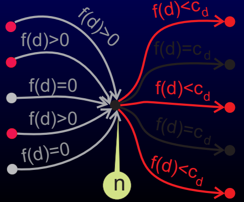
- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.
- Пусть задан поток f. Касающаяся дуга d называется насыщенной для узла n, если
  - $f(d) = 0$, если дуга — входящая в узел
  - $f(d) = c_d$, в противном случае
- Пусть задан поток f. Окрестность узла n — совокупность всех узлов n_*, соединенных с n хотя бы одной ненасыщенной для узла n дугой d
  - Дуга соединяет узлы $\equiv$ касательна обоим узлам



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Определение

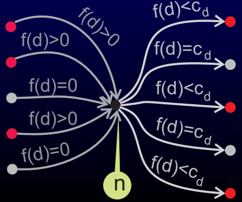
- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.
- Пусть задан поток f. Касающаяся дуга d называется насыщенной для узла n, если
  - $f(d) = 0$, если дуга — входящая в узел
  - $f(d) = c_d$, в противном случае
- Пусть задан поток f. Окрестность узла n — совокупность всех узлов n_*, соединенных с n хотя бы одной ненасыщенной для узла n дугой d
  - Дуга соединяет узлы $\equiv$ касательна обоим узлам



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Определение

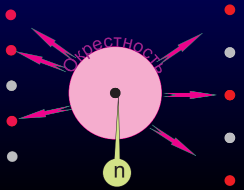
- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.
- Пусть задан поток f. Касающаяся дуга d называется насыщенной для узла n, если
  - $f(d) = 0$, если дуга — входящая в узел
  - $f(d) = c_d$, в противном случае
- Пусть задан поток f. Окрестность узла n — совокупность всех узлов n_*, соединенных с n хотя бы одной ненасыщенной для узла n дугой d
  - Дуга соединяет узлы ≡ касательна обоим узлам



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Определение

- Узел n и дуга d называются касающимися, если n либо начало $n = B(d)$ либо конец $n = E(d)$ дуги d.
- Пусть задан поток f. Касающаяся дуга d называется насыщенной для узла n, если
  - $f(d) = 0$, если дуга — входящая в узел
  - $f(d) = c_d$, в противном случае
- Пусть задан поток f. Окрестность узла n — совокупность всех узлов n_*, соединенных с n хотя бы одной ненасыщенной для узла n дугой d
  - Дуга соединяет узлы $\equiv$ касательна обоим узлам



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Пусть f^0 —максимальный поток.

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Пусть f^0 —максимальный поток. Построим подмножество узлов S следуя итерационной процедуре

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Пусть f^0 —максимальный поток. Построим подмножество узлов S следуя итерационной процедуре

- В начале процесса $S = S_0 := \{s\}$ состоит из одного источника

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Пусть f^0 —максимальный поток. Построим подмножество узлов S следуя итерационной процедуре

- В начале процесса $S = S_0 := \{s\}$ состоит из одного источника
- S_{k+1} — объединение узлов уже построенного множества S_k с окрестностями этих узлов

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

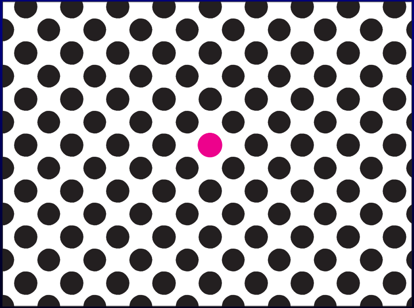
Пусть f^0 —максимальный поток. Построим подмножество узлов S следуя итерационной процедуре

- В начале процесса $S = S_0 := \{s\}$ состоит из одного источника
- S_{k+1} — объединение узлов уже построенного множества S_k с окрестностями этих узлов
- Процесс формирования S_k останавливаем, как только $S_k = S_{k+1}$. В качестве S берем итоговое S_k.

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Пусть f^0 —максимальный поток. Построим подмножество узлов S следуя итерационной процедуре

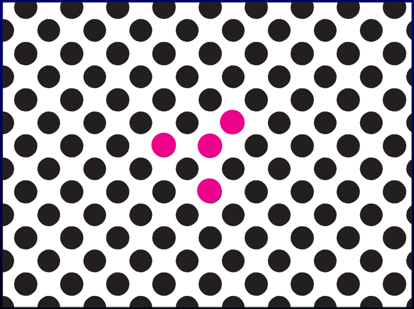
- В начале процесса $S = S_0 := \{s\}$ состоит из одного источника
- S_{k+1} — объединение узлов уже построенного множества S_k с окрестностями этих узлов
- Процесс формирования S_k останавливаем, как только $S_k = S_{k+1}$. В качестве S берем итоговое S_k.



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Пусть f^0 —максимальный поток. Построим подмножество узлов S следуя итерационной процедуре

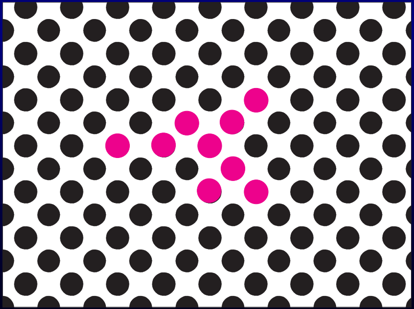
- В начале процесса $S = S_0 := \{s\}$ состоит из одного источника
- S_{k+1} — объединение узлов уже построенного множества S_k с окрестностями этих узлов
- Процесс формирования S_k останавливаем, как только $S_k = S_{k+1}$. В качестве S берем итоговое S_k.



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Пусть f^0 —максимальный поток. Построим подмножество узлов S следуя итерационной процедуре

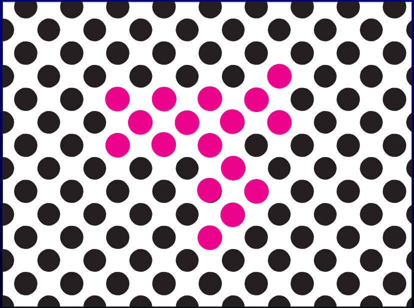
- В начале процесса $S = S_0 := \{s\}$ состоит из одного источника
- S_{k+1} — объединение узлов уже построенного множества S_k с окрестностями этих узлов
- Процесс формирования S_k останавливаем, как только $S_k = S_{k+1}$. В качестве S берем итоговое S_k.



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Пусть f^0 —максимальный поток. Построим подмножество узлов S следуя итерационной процедуре

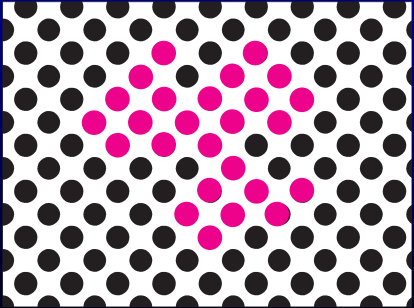
- В начале процесса $S = S_0 := \{s\}$ состоит из одного источника
- S_{k+1} — объединение узлов уже построенного множества S_k с окрестностями этих узлов
- Процесс формирования S_k останавливаем, как только $S_k = S_{k+1}$. В качестве S берем итоговое S_k.



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Пусть f^0 —максимальный поток. Построим подмножество узлов S следуя итерационной процедуре

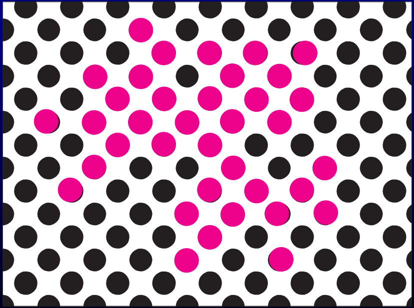
- В начале процесса $S = S_0 := \{s\}$ состоит из одного источника
- S_{k+1} — объединение узлов уже построенного множества S_k с окрестностями этих узлов
- Процесс формирования S_k останавливаем, как только $S_k = S_{k+1}$. В качестве S берем итоговое S_k.



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Пусть f^0 —максимальный поток. Построим подмножество узлов S следуя итерационной процедуре

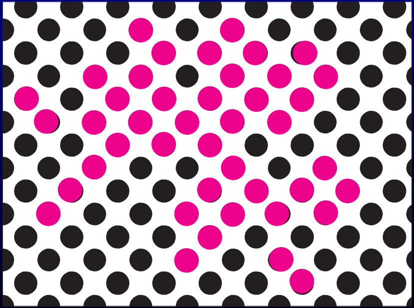
- В начале процесса $S = S_0 := \{s\}$ состоит из одного источника
- S_{k+1} — объединение узлов уже построенного множества S_k с окрестностями этих узлов
- Процесс формирования S_k останавливаем, как только $S_k = S_{k+1}$. В качестве S берем итоговое S_k.



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Пусть f^0 —максимальный поток. Построим подмножество узлов S следуя итерационной процедуре

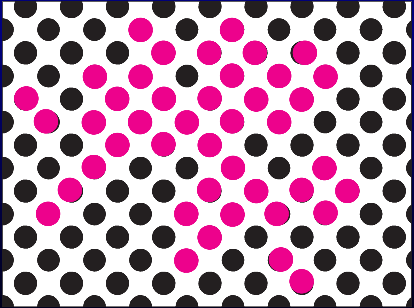
- В начале процесса $S = S_0 := \{s\}$ состоит из одного источника
- S_{k+1} — объединение узлов уже построенного множества S_k с окрестностями этих узлов
- Процесс формирования S_k останавливаем, как только $S_k = S_{k+1}$. В качестве S берем итоговое S_k.



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Пусть f^0 —максимальный поток. Построим подмножество узлов S следуя итерационной процедуре

- В начале процесса $S = S_0 := \{s\}$ состоит из одного источника
- S_{k+1} — объединение узлов уже построенного множества S_k с окрестностями этих узлов
- Процесс формирования S_k останавливаем, как только $S_k = S_{k+1}$. В качестве S берем итоговое S_k.

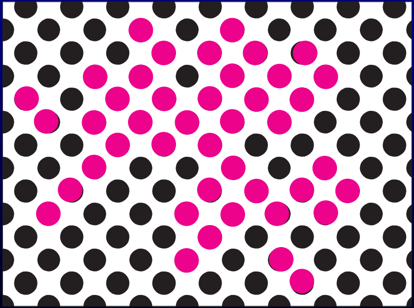


Определим R как множество узлов, не попавших в S.

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Пусть f^0 —максимальный поток. Построим подмножество узлов S следуя итерационной процедуре

- В начале процесса $S = S_0 := \{s\}$ состоит из одного источника
- S_{k+1} — объединение узлов уже построенного множества S_k с окрестностями этих узлов
- Процесс формирования S_k останавливаем, как только $S_k = S_{k+1}$. В качестве S берем итоговое S_k.

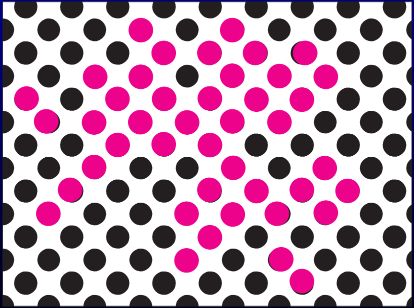


Определим R как множество узлов, не попавших в S. Покажем, что

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Пусть f^0 —максимальный поток. Построим подмножество узлов S следуя итерационной процедуре

- В начале процесса $S = S_0 := \{s\}$ состоит из одного источника
- S_{k+1} — объединение узлов уже построенного множества S_k с окрестностями этих узлов
- Процесс формирования S_k останавливаем, как только $S_k = S_{k+1}$. В качестве S берем итоговое S_k.

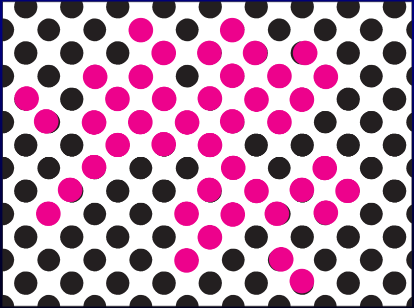


Определим R как множество узлов, не попавших в S. Покажем, что
(S, R) — разрез с требуемым свойством:

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Пусть f^0 —максимальный поток. Построим подмножество узлов S следуя итерационной процедуре

- В начале процесса $S = S_0 := \{s\}$ состоит из одного источника
- S_{k+1} — объединение узлов уже построенного множества S_k с окрестностями этих узлов
- Процесс формирования S_k останавливаем, как только $S_k = S_{k+1}$. В качестве S берем итоговое S_k.

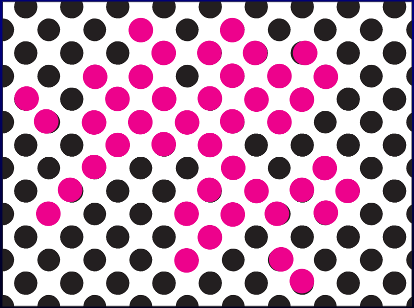


Определим R как множество узлов, не попавших в S. Покажем, что (S, R) — разрез с требуемым свойством: $f(d) = c_d$ для любого прямого моста,

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

Пусть f^0 —максимальный поток. Построим подмножество узлов S следуя итерационной процедуре

- В начале процесса $S = S_0 := \{s\}$ состоит из одного источника
- S_{k+1} — объединение узлов уже построенного множества S_k с окрестностями этих узлов
- Процесс формирования S_k останавливаем, как только $S_k = S_{k+1}$. В качестве S берем итоговое S_k.



Определим R как множество узлов, не попавших в S. Покажем, что (S, R) — разрез с требуемым свойством: $f(d) = c_d$ для любого прямого моста, $f(d) = 0$ — для любого обратного моста

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

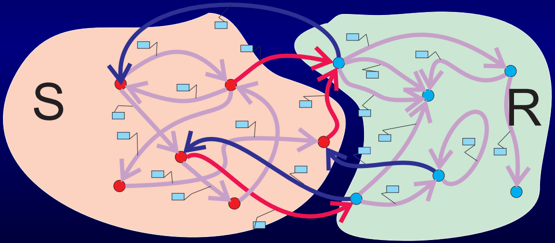
- (S, R) — разрез
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

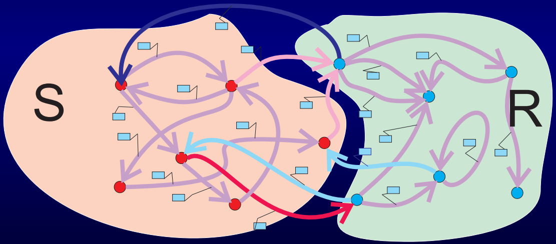
Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста



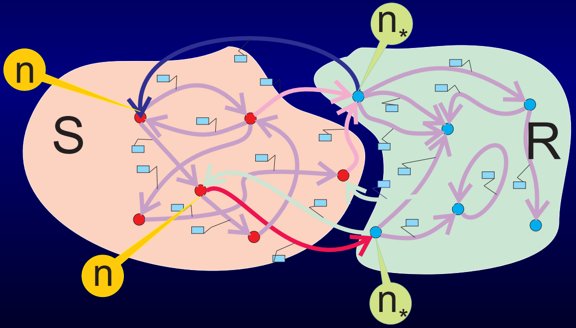
Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста



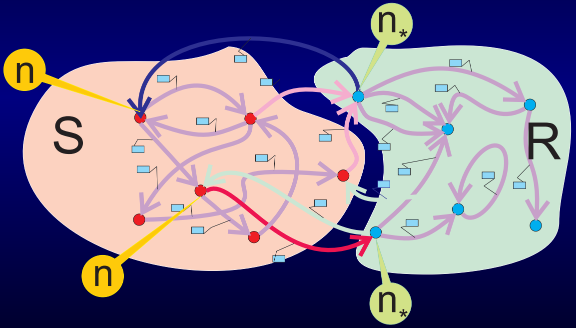
Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

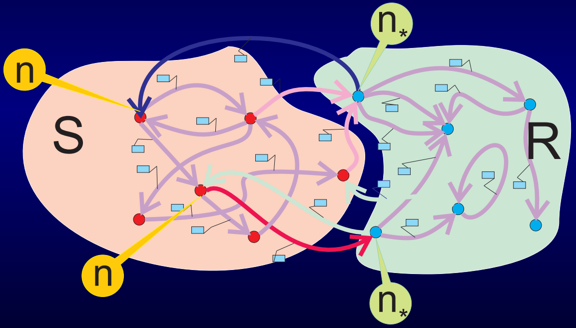
- (S, R) — разрез
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста



при расширении множества S узел n_* в него не попал

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

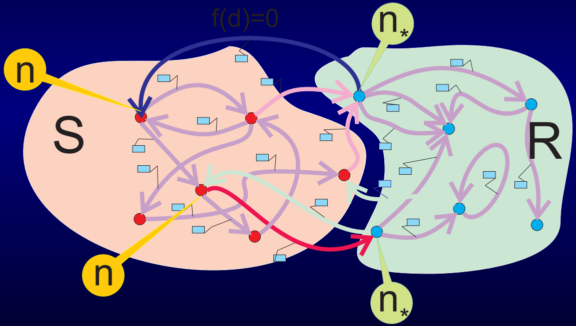


при расширении множества S узел n_* в него не попал

n_* не принадлежит окрестности n

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

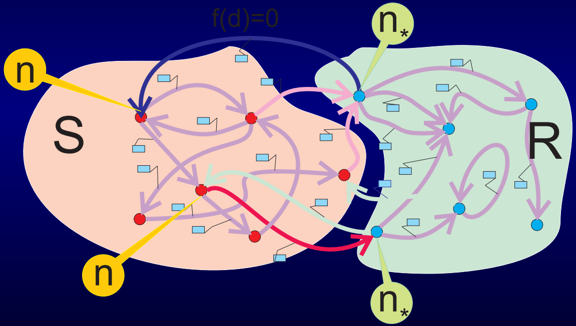
- (S, R) — разрез
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста



при расширении множества S узел n_* в него не попал
n_* не принадлежит окрестности n

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

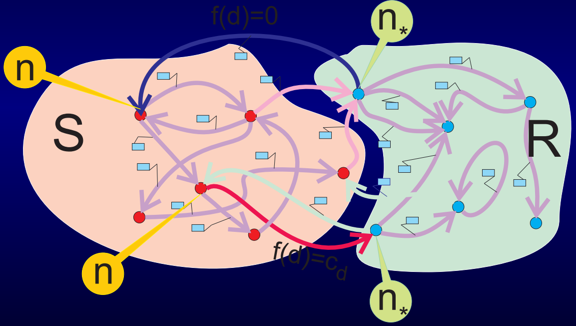
- (S, R) — разрез
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста



при расширении множества S узел n_* в него не попал
n_* не принадлежит окрестности n

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

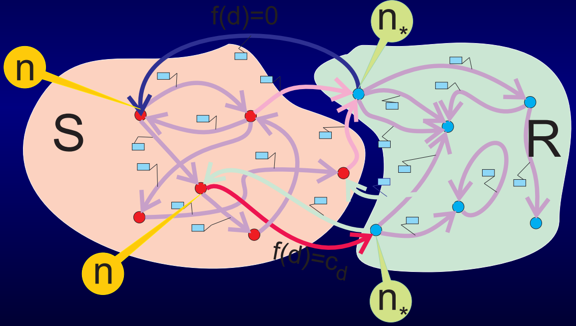
- (S, R) — разрез
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста



при расширении множества S узел n_* в него не попал
n_* не принадлежит окрестности n

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста



при расширении множества S узел n_* в него не попал
n_* не принадлежит окрестности n

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

Для любого узла $n \in S$ существует конечная цепочка узлов $n_0, \ldots, n_k$ со следующими свойствами

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

Для любого узла $n \in S$ существует конечная цепочка узлов $n_0, \ldots, n_k$ со следующими свойствами

- $s = n_0, n = n_k$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

Для любого узла $n \in S$ существует конечная цепочка узлов $n_0, \ldots, n_k$ со следующими свойствами

- $s = n_0, n = n_k$
- n_{i+1} принадлежит окрестности n_i

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

Для любого узла $n \in S$ существует конечная цепочка узлов $n_0, \dots, n_k$ со следующими свойствами

- $s = n_0, n = n_k$
- n_{i+1} принадлежит окрестности n_i

Доказательство: индукцией по j, где $S_j \ni n$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Доказательство: от противного $r \notin R$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Доказательство: от противного $r \notin R \Leftrightarrow r \in S$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Доказательство: от противного $r \notin R \Leftrightarrow r \in S \Rightarrow$ найдется цепочка

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Доказательство: от противного $r \notin R \Leftrightarrow r \in S \Rightarrow$ найдется цепочка

$s = n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k = r, \qquad n_{i+1}$ принадлежит окрестности n_i

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Доказательство: от противного $r \notin R \Leftrightarrow r \in S \Rightarrow$ найдется цепочка

$s = n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k = r, \qquad n_{i+1}$ принадлежит окрестности n_i

$$n_i \longrightarrow n_{i+1},$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Доказательство: от противного $r \notin R \Leftrightarrow r \in S \Rightarrow$ найдется цепочка

$s = n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k = r, \qquad n_{i+1}$ принадлежит окрестности n_i

$$n_i \xrightarrow{f(d)<c_d} n_{i+1},$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Доказательство: от противного $r \notin R \Leftrightarrow r \in S \Rightarrow$ найдется цепочка

$$s = n_0, n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k = r, \qquad n_{i+1} \text{ принадлежит окрестности } n_i$$

$$n_i \xrightarrow{f(d)<c_d} n_{i+1}, \qquad n_i \longleftarrow n_{i+1}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Доказательство: от противного $r \notin R \Leftrightarrow r \in S \Rightarrow$ найдется цепочка

$s = n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k = r,$ $\qquad$ n_{i+1} принадлежит окрестности n_i

$$n_i \xrightarrow{f(d)<c_d} n_{i+1}, \qquad n_i \xleftarrow{f(d)>0} n_{i+1}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Доказательство: от противного $r \notin R \Leftrightarrow r \in S \Rightarrow$ найдется цепочка

$s = n_0, n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k = r, \qquad n_{i+1}$ принадлежит окрестности n_i

$$n_i \xrightarrow{f(d)<c_d} n_{i+1}, \qquad n_i \xleftarrow{f(d)>0} n_{i+1} \quad \Rightarrow \text{цепь дуг } d_0, d_1, \dots, d_{k-1}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Доказательство: от противного $r \notin R \Leftrightarrow r \in S \Rightarrow$ найдется цепочка

$$s = n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k = r, \qquad n_{i+1} \text{ принадлежит окрестности } n_i$$

$$n_i \xrightarrow{f(d)<c_d} n_{i+1}, \qquad n_i \xleftarrow{f(d)>0} n_{i+1} \quad \Rightarrow \text{цепь дуг } d_0, d_1, \ldots, d_{k-1}$$

Выберем $\varepsilon > 0$:

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Доказательство: от противного $r \notin R \Leftrightarrow r \in S \Rightarrow$ найдется цепочка

$$s = n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k = r, \qquad n_{i+1} \text{ принадлежит окрестности } n_i$$

$$n_i \xrightarrow{f(d)<c_d} n_{i+1}, \qquad n_i \xleftarrow{f(d)>0} n_{i+1} \quad \Rightarrow \text{цепь дуг } d_0, d_1, \ldots, d_{k-1}$$

Выберем $\varepsilon > 0$: $\varepsilon \leq c_d - f(d)$ для дуг первого типа,

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Доказательство: от противного $r \notin R \Leftrightarrow r \in S \Rightarrow$ найдется цепочка

$$s = n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k = r, \qquad n_{i+1} \text{ принадлежит окрестности } n_i$$

$$n_i \xrightarrow{f(d)<c_d} n_{i+1}, \qquad n_i \xleftarrow{f(d)>0} n_{i+1} \quad \Rightarrow \text{цепь дуг } d_0, d_1, \ldots, d_{k-1}$$

$$\text{Выберем } \varepsilon > 0: \begin{array}{l} \varepsilon \le c_d - f(d) \text{ для дуг первого типа,} \\ \varepsilon \le f(d) \text{ для дуг второго типа} \end{array}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Доказательство: от противного $r \notin R \Leftrightarrow r \in S \Rightarrow$ найдется цепочка

$s = n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k = r, \qquad n_{i+1}$ принадлежит окрестности n_i

$n_i \xrightarrow{f(d)<c_d} n_{i+1}, \qquad n_i \xleftarrow{f(d)>0} n_{i+1} \quad \Rightarrow$ цепь дуг $d_0, d_1, \ldots, d_{k-1}$

Выберем $\varepsilon > 0$: $\varepsilon \leq c_d - f(d)$ для дуг первого типа,
$\varepsilon \leq f(d)$ для дуг второго типа

Изменим поток: $f(d) :=$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Доказательство: от противного $r \notin R \Leftrightarrow r \in S \Rightarrow$ найдется цепочка

$$s = n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k = r, \qquad n_{i+1} \text{ принадлежит окрестности } n_i$$

$$n_i \xrightarrow{f(d)<c_d} n_{i+1}, \qquad n_i \xleftarrow{f(d)>0} n_{i+1} \quad \Rightarrow \text{цепь дуг } d_0, d_1, \ldots, d_{k-1}$$

$$\text{Выберем } \varepsilon > 0: \begin{array}{l} \varepsilon \leq c_d - f(d) \text{ для дуг первого типа,} \\ \varepsilon \leq f(d) \text{ для дуг второго типа} \end{array}$$

$$\text{Изменим поток: } f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Доказательство: от противного $r \notin R \Leftrightarrow r \in S \Rightarrow$ найдется цепочка

$$s = n_0, n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k = r, \qquad n_{i+1} \text{ принадлежит окрестности } n_i$$

$$n_i \xrightarrow{f(d)<c_d} n_{i+1}, \qquad n_i \xleftarrow{f(d)>0} n_{i+1} \quad \Rightarrow \text{цепь дуг } d_0, d_1, \dots, d_{k-1}$$

$$\text{Выберем } \varepsilon > 0\text{:} \quad \begin{matrix} \varepsilon \le c_d - f(d) \text{ для дуг первого типа,} \\ \varepsilon \le f(d) \text{ для дуг второго типа} \end{matrix}$$

$$\text{Изменим поток: } f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$$

Почему получим поток?

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Доказательство: от противного $r \notin R \Leftrightarrow r \in S \Rightarrow$ найдется цепочка

$$s = n_0, n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k = r, \qquad n_{i+1} \text{ принадлежит окрестности } n_i$$

$$n_i \xrightarrow{f(d)<c_d} n_{i+1}, \qquad n_i \xleftarrow{f(d)>0} n_{i+1} \quad \Rightarrow \text{цепь дуг } d_0, d_1, \dots, d_{k-1}$$

Выберем $\varepsilon > 0$: $\begin{array}{l} \varepsilon \le c_d - f(d) \text{ для дуг первого типа,} \\ \varepsilon \le f(d) \text{ для дуг второго типа} \end{array}$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \le f(d) \le c_d$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n?

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.
$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n?

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.
$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n?

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = 0, \text{ если } n \text{ вне цепочки}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \le f(d) \le c_d$.
$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n?

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = 0, \text{ если } n \text{ вне цепочки}$$

Не изменились.

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n?

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = 0, \text{ если } n \text{ вне цепочки}$$

Не изменились. Изменились только для дуг, которые обоими концами опираются на цепочку

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.
$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n?

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = ?, \text{ если } n \text{ на цепочке}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.
$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n?

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = ?, \text{ если } n \text{ на цепочке}$$

n — внутренний узел

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.
$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n?

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = ?, \text{ если } n \text{ на цепочке}$$

n — внутренний узел $\Rightarrow$ n не начало $n \neq n_0 = s$ и не конец $n \neq n_k = r$ цепочки

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \le f(d) \le c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n?

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = ?, \text{ если } n \text{ на цепочке}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = 0 \text{ до изменения потока}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = 0 \text{ до изменения потока}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

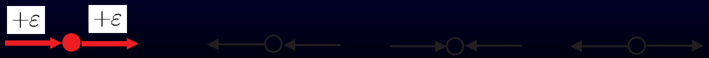
$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \le f(d) \le c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = 0 \text{ до изменения потока}$$



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

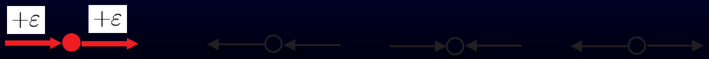
Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.
$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{d \in A(n)} f(d) + \varepsilon - \sum_{d \in B(n)} f(d) - \varepsilon = 0 \text{ до изменения потока}$$



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

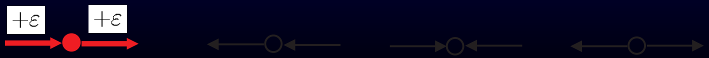
$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) + \varepsilon - \sum_{d \in B(n)} f(d) - \varepsilon = 0$$ после изменения потока



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = 0 \text{ до изменения потока}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \le f(d) \le c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = 0 \text{ до изменения потока}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \varepsilon - \sum_{d \in B(n)} f(d) + \varepsilon = 0 \text{ до изменения потока}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \varepsilon - \sum_{d \in B(n)} f(d) + \varepsilon = 0 \text{ до изменения потока}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = 0 \text{ после изменения потока}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \le f(d) \le c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = 0 \text{ до изменения потока}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = 0 \text{ до изменения потока}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

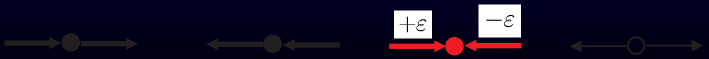
$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) + \varepsilon - \varepsilon = 0 \text{ до изменения потока}$$



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \le f(d) \le c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$\mathrm{Div}_n(f) \overset{\text{def}}{=\!=} \sum\limits_{d \in A(n)} f(d) - \sum\limits_{d \in B(n)} f(d) + \varepsilon - \varepsilon = 0$ после изменения потока

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = 0 \text{ до изменения потока}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

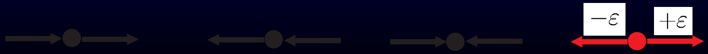
$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = 0 \text{ до изменения потока}$$



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

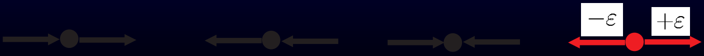
$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) + \varepsilon - \varepsilon - \sum_{d \in B(n)} f(d) = 0 \text{ до изменения потока}$$



Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

$$\text{Изменим поток: } f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$$

Почему получим поток? $0 \le f(d) \le c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) + \varepsilon - \varepsilon - \sum_{d \in B(n)} f(d) = 0 \text{ после изменения потока}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \le f(d) \le c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n? n—внутренний узел

$$\mathrm{Div}_n(f) \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(n)} f(d) - \sum_{d \in B(n)} f(d) = 0 \text{ после изменения потока}$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \le f(d) \le c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \ge 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$?

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\mathrm{Div}_s(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(s)} f(d) \quad - \sum_{d \in B(s)} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\mathrm{Div}_s(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(s)} f(d) \qquad - \sum_{d \in B(s)} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\mathrm{Div}_s(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(s)} f(d) \qquad - \sum_{d \in B(s)} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\mathrm{Div}_s(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(s)} f(d) \qquad - \sum_{d \in B(s)} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\mathrm{Div}_s(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(s)} f(d) + \varepsilon - \sum_{d \in B(s)} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \le f(d) \le c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \ge 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\mathrm{Div}_s(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(s)} f(d) + \varepsilon - \sum_{d \in B(s)} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.
$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?
$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\mathrm{Div}_s(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(s)} f(d) + \varepsilon - \sum_{d \in B(s)} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\mathrm{Div}_s(f) \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(s)} f(d) \quad - \sum_{d \in B(s)} f(d) - (-\varepsilon)$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \le f(d) \le c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \ge 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\mathrm{Div}_s(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{d \in A(s)} f(d) \quad - \sum_{d \in B(s)} f(d) \qquad + \varepsilon$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\mathrm{Div}_s(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d \in A(s)} f(d) - \sum_{d \in B(s)} f(d)$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

поток f

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\text{поток } f \xrightarrow{\text{изменение}} \text{поток } f',$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\text{поток } f \xrightarrow{\text{изменение}} \text{поток } f', \qquad W(f') = W(f) + \varepsilon$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\text{поток } f \xrightarrow{\text{изменение}} \text{поток } f', \qquad W(f') = W(f) + \varepsilon$$

Противоречие с максимальностью потока f

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\text{поток } f \xrightarrow{\text{изменение}} \text{поток } f', \qquad W(f') = W(f) + \varepsilon$$

Противоречие с максимальностью потока f

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\text{поток } f \xrightarrow{\text{изменение}} \text{поток } f', \qquad W(f') = W(f) + \varepsilon$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\text{поток } f \xrightarrow{\text{изменение}} \text{поток } f', \qquad W(f') = W(f) + \varepsilon$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$?
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.
$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?
$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\text{поток } f \xrightarrow{\text{изменение}} \text{поток } f', \qquad W(f') = W(f) + \varepsilon$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез $r \in R$
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\text{поток } f \xrightarrow{\text{изменение}} \text{поток } f', \qquad W(f') = W(f) + \varepsilon$$

Доказательство теоремы Форда-Фулкенсона

- (S, R) — разрез
- $f(d) = c_d$ для любого прямого моста
- $f(d) = 0$ для любого обратного моста

Лемма

$r \in R$

Изменим поток: $f(d) := \begin{cases} f(d) + \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга первого типа} \\ f(d) - \varepsilon & \text{если } d \text{ дуга второго типа} \\ f(d) & \text{если } d \text{ не лежит на цепочке} \end{cases}$

Почему получим поток? $0 \leq f(d) \leq c_d$.

$\mathrm{Div}_n(f) = 0$ для внутренних узлов n $\mathrm{Div}_s(f) \geq 0$?

$\mathrm{Div}_s(f) \xrightarrow{\text{изменение}} \mathrm{Div}_s(f) + \varepsilon$

$$\text{поток } f \xrightarrow{\text{изменение}} \text{поток } f', \qquad W(f') = W(f) + \varepsilon$$

Дополнительные выводы из доказательства

Определение

- Путь на сети — последовательность дуг $d_0, d_1, \ldots, d_k$, в которой любые две соседние дуги касаются общего узла

Дополнительные выводы из доказательства

Определение

- Путь на сети — последовательность дуг $d_0, d_1, \ldots, d_k$, в которой любые две соседние дуги касаются общего узла
- Путь идет из узла n в узел $m \Leftrightarrow d_0$ касается n, а d_k — m.

Дополнительные выводы из доказательства

Определение

- Путь на сети — последовательность дуг $d_0, d_1, \ldots, d_k$, в которой любые две соседние дуги касаются общего узла
- Путь идет из узла n в узел $m \Leftrightarrow d_0$ касается n, а d_k — m.
- Несократимый путь из n в m — нельзя выкинуть ни одной дуги

Дополнительные выводы из доказательства

Определение

- Путь на сети — последовательность дуг $d_0, d_1, \ldots, d_k$, в которой любые две соседние дуги касаются общего узла
- Путь идет из узла n в узел $m \Leftrightarrow d_0$ касается n, а d_k — m.
- Несократимый путь из n в m — нельзя выкинуть ни одной дуги
  На несократимом пути нет повторяющихся дуг или узлов.
- Дуга d_i ориентирована вдоль пути — конец $E(d_i)$ касается следующей дуги d_{i+1}, если $i < k$, и начало $B(d_i)$ касается предыдущей дуги d_{i-1}, если $i > 0$

Дополнительные выводы из доказательства

Определение

- Путь на сети — последовательность дуг $d_0, d_1, \ldots, d_k$, в которой любые две соседние дуги касаются общего узла
- Путь идет из узла n в узел $m \Leftrightarrow d_0$ касается n, а d_k — m.
- Несократимый путь из n в m — нельзя выкинуть ни одной дуги
  На несократимом пути нет повторяющихся дуг или узлов.
- Дуга d_i ориентирована вдоль пути — конец $E(d_i)$ касается следующей дуги d_{i+1}, если $i < k$, и начало $B(d_i)$ касается предыдущей дуги d_{i-1}, если $i > 0$
- Дуга d_i ориентирована против пути — наоборот

Дополнительные выводы из доказательства

Определение

- Путь на сети — последовательность дуг $d_0, d_1, \ldots, d_k$, в которой любые две соседние дуги касаются общего узла
- Путь идет из узла n в узел $m \Leftrightarrow d_0$ касается n, а d_k — m.
- Несократимый путь из n в m — нельзя выкинуть ни одной дуги
  На несократимом пути нет повторяющихся дуг или узлов.
- Дуга d_i ориентирована вдоль пути — конец $E(d_i)$ касается следующей дуги d_{i+1}, если $i < k$, и начало $B(d_i)$ касается предыдущей дуги d_{i-1}, если $i > 0$
- Дуга d_i ориентирована против пути — наоборот
- Повышающий путь для потока f — несократимый путь, на котором

Дополнительные выводы из доказательства

Определение

- Путь на сети — последовательность дуг $d_0, d_1, \ldots, d_k$, в которой любые две соседние дуги касаются общего узла
- Путь идет из узла n в узел $m \Leftrightarrow d_0$ касается n, а d_k — m.
- Несократимый путь из n в m — нельзя выкинуть ни одной дуги
  На несократимом пути нет повторяющихся дуг или узлов.
- Дуга d_i ориентирована вдоль пути — конец $E(d_i)$ касается следующей дуги d_{i+1}, если $i < k$, и начало $B(d_i)$ касается предыдущей дуги d_{i-1}, если $i > 0$
- Дуга d_i ориентирована против пути — наоборот
- Повышающий путь для потока f — несократимый путь, на котором
  - $f(d_i) < c_{d_i}$ на любой ориентированной вдоль пути дуги

Дополнительные выводы из доказательства

Определение

- Путь на сети — последовательность дуг $d_0, d_1, \ldots, d_k$, в которой любые две соседние дуги касаются общего узла
- Путь идет из узла n в узел $m \Leftrightarrow d_0$ касается n, а d_k — m.
- Несократимый путь из n в m — нельзя выкинуть ни одной дуги
  На несократимом пути нет повторяющихся дуг или узлов.
- Дуга d_i ориентирована вдоль пути — конец $E(d_i)$ касается следующей дуги d_{i+1}, если $i < k$, и начало $B(d_i)$ касается предыдущей дуги d_{i-1}, если $i > 0$
- Дуга d_i ориентирована против пути — наоборот
- Повышающий путь для потока f — несократимый путь, на котором
  - $f(d_i) < c_{d_i}$ на любой ориентированной вдоль пути дуги
  - $f(d_i) > 0$ на любой ориентированной против пути дуги

Дополнительные выводы из доказательства

Выводы:

Дополнительные выводы из доказательства

Выводы:

- Если для потока f существует повышающий путь из источника в сток, то можно построить поток f' большей мощности.

Дополнительные выводы из доказательства

Выводы:

- Если для потока f существует повышающий путь из источника в сток, то можно построить поток f' большей мощности.
- Именно

$$W(f') = W(f) + \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon := \min_{d-\text{дуга пути}} \varepsilon(d)$$

$$\varepsilon(d) := \begin{cases} c_d - f(d) & \text{если дуга ориентирована вдоль пути} \\ f(d) & \text{если дуга ориентирована против пути} \end{cases}$$

Дополнительные выводы из доказательства

Выводы:

- Если для потока f существует повышающий путь из источника в сток, то можно построить поток f' большей мощности.
- Именно

$$W(f') = W(f) + \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon := \min_{d - \text{дуга пути}} \varepsilon(d)$$

$$\varepsilon(d) := \begin{cases} c_d - f(d) & \text{если дуга ориентирована вдоль пути} \\ f(d) & \text{если дуга ориентирована против пути} \end{cases}$$

- Поток максимален в том и только том случае, когда для него не существует повышающего пути из источника в сток

Дополнительные выводы из доказательства

Выводы:

- Если для потока f существует повышающий путь из источника в сток, то можно построить поток f' большей мощности.
- Именно

$$W(f') = W(f) + \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon := \min_{d\text{—дуга пути}} \varepsilon(d)$$

$$\varepsilon(d) := \begin{cases} c_d - f(d) & \text{если дуга ориентирована вдоль пути} \\ f(d) & \text{если дуга ориентирована против пути} \end{cases}$$

- Поток максимален в том и только том случае, когда для него не существует повышающего пути из источника в сток
- Найти минимальный разрез — определить все узлы, в которые есть повышающий (для максимального потока) путь из источника

Множество минимальных разрезов

Напоминание:

Множество минимальных разрезов

Напоминание:

Разрез минимален

Множество минимальных разрезов

Напоминание:

Разрез минимален $\Leftrightarrow$ Разрез насыщен относительно максимального потока f

Множество минимальных разрезов

Напоминание:

Разрез минимален $\Leftrightarrow$ Разрез насыщен относительно максимального потока f $\Leftrightarrow$ Мосты через разрез насыщены

Множество минимальных разрезов

Напоминание:

Разрез минимален $\Leftrightarrow$ Разрез насыщен относительно максимального потока f $\Leftrightarrow$ Мосты через разрез насыщены $\Leftrightarrow$ $f(d) = c_d$ для прямых мостов и $f(d) = 0$ для обратных мостов

Множество минимальных разрезов

Напоминание:

Разрез минимален $\Leftrightarrow$ Разрез насыщен относительно максимального потока f $\Leftrightarrow$ Мосты через разрез насыщены $\Leftrightarrow$ $f(d) = c_d$ для прямых мостов и $f(d) = 0$ для обратных мостов

Следствие

Пусть (S', R') и (S'', R'') минимальные разрезы. Тогда

Множество минимальных разрезов

Напоминание:

Разрез минимален $\Leftrightarrow$ Разрез насыщен относительно максимального потока f $\Leftrightarrow$ Мосты через разрез насыщены $\Leftrightarrow$ $f(d) = c_d$ для прямых мостов и $f(d) = 0$ для обратных мостов

Следствие

Пусть (S', R') и (S'', R'') минимальные разрезы. Тогда

- $(S' \cup S'', R' \cap R'')$— минимальный разрез;

Множество минимальных разрезов

Напоминание:

Разрез минимален $\Leftrightarrow$ Разрез насыщен относительно максимального потока f $\Leftrightarrow$ Мосты через разрез насыщены $\Leftrightarrow$ $f(d) = c_d$ для прямых мостов и $f(d) = 0$ для обратных мостов

Следствие

Пусть (S', R') и (S'', R'') минимальные разрезы. Тогда

- $(S' \cup S'', R' \cap R'')$— минимальный разрез;
- $(S' \cap S'', R' \cup R'')$— минимальный разрез;

Множество минимальных разрезов

Напоминание:

Разрез минимален $\Leftrightarrow$ Разрез насыщен относительно максимального потока f $\Leftrightarrow$ Мосты через разрез насыщены $\Leftrightarrow$ $f(d) = c_d$ для прямых мостов и $f(d) = 0$ для обратных мостов

Следствие

Пусть (S', R') и (S'', R'') минимальные разрезы. Тогда

- $(S' \cup S'', R' \cap R'')$— минимальный разрез;
- $(S' \cap S'', R' \cup R'')$— минимальный разрез;
- Существует минимальный разрез (S_*, R_*) с наименьшим снабжающим множеством: $S_* \subset S$ для любого минимального разреза (S, R);

Множество минимальных разрезов

Напоминание:

Разрез минимален $\Leftrightarrow$ Разрез насыщен относительно максимального потока f $\Leftrightarrow$ Мосты через разрез насыщены $\Leftrightarrow$ $f(d) = c_d$ для прямых мостов и $f(d) = 0$ для обратных мостов

Следствие

Пусть (S', R') и (S'', R'') минимальные разрезы. Тогда

- $(S' \cup S'', R' \cap R'')$— минимальный разрез;
- $(S' \cap S'', R' \cup R'')$— минимальный разрез;
- Существует минимальный разрез (S_*, R_*) с наименьшим снабжающим множеством: $S_* \subset S$ для любого минимального разреза (S, R);
- Существует минимальный разрез (S^*, R^*) с наибольшим снабжающим множеством: $S^* \supset S$ для любого минимального разреза (S, R);

Множество минимальных разрезов

Наблюдение

Разрез (S_{FF}, R_{FF}), построенный при доказательстве теоремы Форда-Фулкенсона, — это разрез (S_*, R_*) с наименьшим снабжающим множеством.

Множество минимальных разрезов

Наблюдение

Разрез (S_{FF}, R_{FF}), построенный при доказательстве теоремы Форда-Фулкенсона, — это разрез (S_*, R_*) с наименьшим снабжающим множеством.

Обоснование:

Множество минимальных разрезов

Наблюдение

Разрез (S_{FF}, R_{FF}), построенный при доказательстве теоремы Форда-Фулкенсона, — это разрез (S_*, R_*) с наименьшим снабжающим множеством.

Обоснование: Все узлы $n \in (S_{FF}, R_{FF})$ можно соединить с источником повышающим путем (по построению).

Множество минимальных разрезов

Наблюдение

Разрез (S_{FF}, R_{FF}), построенный при доказательстве теоремы Форда-Фулкенсона, — это разрез (S_*, R_*) с наименьшим снабжающим множеством.

Обоснование: Все узлы $n \in (S_{FF}, R_{FF})$ можно соединить с источником повышающим путем (по построению). Допустим, что на нем встречаются мосты через (S_*, R_*), и d — первый такой мост.

Множество минимальных разрезов

Наблюдение

Разрез (S_{FF}, R_{FF}), построенный при доказательстве теоремы Форда-Фулкенсона, — это разрез (S_*, R_*) с наименьшим снабжающим множеством.

Обоснование: Все узлы $n \in (S_{FF}, R_{FF})$ можно соединить с источником повышающим путем (по построению). Допустим, что на нем встречаются мосты через (S_*, R_*), и d — первый такой мост. Так как разрез (S_*, R_*) минимален, этот мост насыщен: $f(d) = c_d$, если $B(d) \in S_*$ и $E(d) \in R_*$, и $f(d) = 0$, если $E(d) \in S_*$ и $B(d) \in R_*$.

Множество минимальных разрезов

Наблюдение

Разрез (S_{FF}, R_{FF}), построенный при доказательстве теоремы Форда-Фулкенсона, — это разрез (S_*, R_*) с наименьшим снабжающим множеством.

Обоснование: Все узлы $n \in (S_{FF}, R_{FF})$ можно соединить с источником повышающим путем (по построению). Допустим, что на нем встречаются мосты через (S_*, R_*), и d — первый такой мост. Так как разрез (S_*, R_*) минимален, этот мост насыщен: $f(d) = c_d$, если $B(d) \in S_*$ и $E(d) \in R_*$, и $f(d) = 0$, если $E(d) \in S_*$ и $B(d) \in R_*$. Так как путь — повышающий, то в первом случае дуга d ориентирована против пути, а во втором - вдоль.

Множество минимальных разрезов

Наблюдение

Разрез (S_{FF}, R_{FF}), построенный при доказательстве теоремы Форда-Фулкенсона, — это разрез (S_*, R_*) с наименьшим снабжающим множеством.

Обоснование: Все узлы $n \in (S_{FF}, R_{FF})$ можно соединить с источником повышающим путем (по построению). Допустим, что на нем встречаются мосты через (S_*, R_*), и d — первый такой мост. Так как разрез (S_*, R_*) минимален, этот мост насыщен: $f(d) = c_d$, если $B(d) \in S_*$ и $E(d) \in R_*$, и $f(d) = 0$, если $E(d) \in S_*$ и $B(d) \in R_*$. Так как путь — повышающий, то в первом случае дуга d ориентирована против пути, а во втором - вдоль. В любом случае в последовательности узлов, проходимых по рассматриваемому пути $s = n_1, n_2, \ldots, n_k$, первый из двух узлов n_i, n_{i+1}, касающихся дуги d, принадлежит R_*.

Множество минимальных разрезов

Наблюдение

Разрез (S_{FF}, R_{FF}), построенный при доказательстве теоремы Форда-Фулкенсона, — это разрез (S_*, R_*) с наименьшим снабжающим множеством.

Обоснование: Все узлы $n \in (S_{FF}, R_{FF})$ можно соединить с источником повышающим путем (по построению). Допустим, что на нем встречаются мосты через (S_*, R_*), и d — первый такой мост. Так как разрез (S_*, R_*) минимален, этот мост насыщен: $f(d) = c_d$, если $B(d) \in S_*$ и $E(d) \in R_*$, и $f(d) = 0$, если $E(d) \in S_*$ и $B(d) \in R_*$. Так как путь — повышающий, то в первом случае дуга d ориентирована против пути, а во втором - вдоль. В любом случае в последовательности узлов, проходимых по рассматриваемому пути $s = n_1, n_2, \dots, n_k$, первый из двух узлов n_i, n_{i+1}, касающихся дуги d, принадлежит R_*. Так как $s \in S_*$, на пути есть еще один мост из S_* в R_*, и этот мост втречается раньше d.

Множество минимальных разрезов

Наблюдение

Разрез (S_{FF}, R_{FF}), построенный при доказательстве теоремы Форда-Фулкенсона, — это разрез (S_*, R_*) с наименьшим снабжающим множеством.

Обоснование: Все узлы $n \in (S_{FF}, R_{FF})$ можно соединить с источником повышающим путем (по построению). Допустим, что на нем встречаются мосты через (S_*, R_*), и d — первый такой мост. Так как разрез (S_*, R_*) минимален, этот мост насыщен: $f(d) = c_d$, если $B(d) \in S_*$ и $E(d) \in R_*$, и $f(d) = 0$, если $E(d) \in S_*$ и $B(d) \in R_*$. Так как путь — повышающий, то в первом случае дуга d ориентирована против пути, а во втором - вдоль. В любом случае в последовательности узлов, проходимых по рассматриваемому пути $s = n_1, n_2, \dots, n_k$, первый из двух узлов n_i, n_{i+1}, касающихся дуги d, принадлежит R_*. Так как $s \in S_*$, на пути есть еще один мост из S_* в R_*, и этот мост втречается раньше d. Это противоречит определению d как первого моста.

Множество минимальных разрезов

Наблюдение

Разрез (S_{FF}, R_{FF}), построенный при доказательстве теоремы Форда-Фулкенсона, — это разрез (S_*, R_*) с наименьшим снабжающим множеством.

Обоснование: Все узлы $n \in (S_{FF}, R_{FF})$ можно соединить с источником повышающим путем (по построению). Допустим, что на нем встречаются мосты через (S_*, R_*), и d — первый такой мост. Так как разрез (S_*, R_*) минимален, этот мост насыщен: $f(d) = c_d$, если $B(d) \in S_*$ и $E(d) \in R_*$, и $f(d) = 0$, если $E(d) \in S_*$ и $B(d) \in R_*$. Так как путь — повышающий, то в первом случае дуга d ориентирована против пути, а во втором - вдоль. В любом случае в последовательности узлов, проходимых по рассматриваемому пути $s = n_1, n_2, \dots, n_k$, первый из двух узлов n_i, n_{i+1}, касающихся дуги d, принадлежит R_*. Так как $s \in S_*$, на пути есть еще один мост из S_* в R_*, и этот мост втречается раньше d. Это противоречит определению d как первого моста. Полученное противоречие доказывает, что на рассматриваемом пути мосты через (S_*, R_*) вообще не встречаются.

Множество минимальных разрезов

Наблюдение

Разрез (S_{FF}, R_{FF}), построенный при доказательстве теоремы Форда-Фулкенсона, — это разрез (S_*, R_*) с наименьшим снабжающим множеством.

Обоснование: Все узлы $n \in (S_{FF}, R_{FF})$ можно соединить с источником повышающим путем (по построению). Допустим, что на нем встречаются мосты через (S_*, R_*), и d — первый такой мост. Так как разрез (S_*, R_*) минимален, этот мост насыщен: $f(d) = c_d$, если $B(d) \in S_*$ и $E(d) \in R_*$, и $f(d) = 0$, если $E(d) \in S_*$ и $B(d) \in R_*$. Так как путь — повышающий, то в первом случае дуга d ориентирована против пути, а во втором - вдоль. В любом случае в последовательности узлов, проходимых по рассматриваемому пути $s = n_1, n_2, \ldots, n_k$, первый из двух узлов n_i, n_{i+1}, касающихся дуги d, принадлежит R_*. Так как $s \in S_*$, на пути есть еще один мост из S_* в R_*, и этот мост встречается раньше d. Это противоречит определению d как первого моста. Полученное противоречие доказывает, что на рассматриваемом пути мосты через (S_*, R_*) вообще не встречаются. Значит $n \in S_* \; \forall n \in S_{FF} \Rightarrow S_{FF} \subset S_*$. Так как (S_{FF}, R_{FF}) - минимальный

Множество минимальных разрезов

Наблюдение

Разрез (S_{FF}, R_{FF}), построенный при доказательстве теоремы Форда-Фулкенсона, — это разрез (S_*, R_*) с наименьшим снабжающим множеством.

Наблюдение

Разрез (S^*, R^*) с наибольшим снабжающим множеством можно построить аналогично: R^* — совокупность всех узлов, которые можно соединить со стоком r повышающим путем.

Множество минимальных разрезов

Наблюдение

Разрез (S_{FF}, R_{FF}), построенный при доказательстве теоремы Форда-Фулкенсона, — это разрез (S_*, R_*) с наименьшим снабжающим множеством.

Наблюдение

Разрез (S^*, R^*) с наибольшим снабжающим множеством можно построить аналогично: R^* — совокупность всех узлов, которые можно соединить со стоком r повышающим путем.

Лемма

Минимальный разрез единственен в том и только том случае, когда $(S_*, R_*) = (S^*, R^*)$

Метод кратчайших путей

Метод кратчайших путей

Цель: конструктивное построение минимального разреза и максимального потока

Метод кратчайших путей

Определение

Пусть задан поток f.

Метод кратчайших путей

Определение

Пусть задан поток f.

- Длина пути — число составляющих его дуг

Метод кратчайших путей

Определение

Пусть задан поток f.

- Длина пути — число составляющих его дуг
- f-кратчайший путь из узла n_1 в узел n_2 — повышающий (по отношению к потоку f) путь из n_1 в n_2, длина которого минимальна среди всех таких путей.

Метод кратчайших путей

Определение

Пусть задан поток f.

- Длина пути — число составляющих его дуг
- f-кратчайший путь из узла n_1 в узел n_2 — повышающий (по отношению к потоку f) путь из n_1 в n_2, длина которого минимальна среди всех таких путей.
- f-ранг $R_f(n)$ узла n (по отношению к источнику s) — длина f-кратчайшего пути из s в n, если s можно соединить с n повышающим путем, и $R_f(n) := +\infty$ в противном случае. ($R_f(s) := 0$.)

Метод кратчайших путей

Определение

Пусть задан поток f.

- Длина пути — число составляющих его дуг
- f-кратчайший путь из узла n_1 в узел n_2 — повышающий (по отношению к потоку f) путь из n_1 в n_2, длина которого минимальна среди всех таких путей.
- f-ранг $R_f(n)$ узла n (по отношению к источнику s) — длина f-кратчайшего пути из s в n, если s можно соединить с n повышающим путем, и $R_f(n) := +\infty$ в противном случае. ($R_f(s) := 0$.)
- $N_f(k)$ — совокупность всех узлов n ранга k: $R_f(n) = k$

Метод кратчайших путей

Определение

Пусть задан поток f.

- Длина пути — число составляющих его дуг
- f-кратчайший путь из узла n_1 в узел n_2 — повышающий (по отношению к потоку f) путь из n_1 в n_2, длина которого минимальна среди всех таких путей.
- f-ранг $R_f(n)$ узла n (по отношению к источнику s) — длина f-кратчайшего пути из s в n, если s можно соединить с n повышающим путем, и $R_f(n) := +\infty$ в противном случае. ($R_f(s) := 0$.)
- $N_f(k)$ — совокупность всех узлов n ранга k: $R_f(n) = k$

Наблюдение

Метод кратчайших путей

Определение

Пусть задан поток f.

- Длина пути — число составляющих его дуг
- f-кратчайший путь из узла n_1 в узел n_2 — повышающий (по отношению к потоку f) путь из n_1 в n_2, длина которого минимальна среди всех таких путей.
- f-ранг $R_f(n)$ узла n (по отношению к источнику s) — длина f-кратчайшего пути из s в n, если s можно соединить с n повышающим путем, и $R_f(n) := +\infty$ в противном случае. ($R_f(s) := 0$.)
- $N_f(k)$ — совокупность всех узлов n ранга k: $R_f(n) = k$

Наблюдение

- $N_f(0) = \{s\}$; $N_f(k) \cap N_f(l) \forall\, k \neq l$;

Метод кратчайших путей

Определение

Пусть задан поток f.

- Длина пути — число составляющих его дуг
- f-кратчайший путь из узла n_1 в узел n_2 — повышающий (по отношению к потоку f) путь из n_1 в n_2, длина которого минимальна среди всех таких путей.
- f-ранг $R_f(n)$ узла n (по отношению к источнику s) — длина f-кратчайшего пути из s в n, если s можно соединить с n повышающим путем, и $R_f(n) := +\infty$ в противном случае. ($R_f(s) := 0$.)
- $N_f(k)$ — совокупность всех узлов n ранга k: $R_f(n) = k$

Наблюдение

- $N_f(0) = \{s\}$; $N_f(k) \cap N_f(l) \forall\, k \neq l$;
- $\bigcup_{k<\infty} N_f(k) \ni \{r\} \Leftrightarrow$ поток f не максимален

Метод кратчайших путей

Определение

Пусть задан поток f.

- Длина пути — число составляющих его дуг
- f-кратчайший путь из узла n_1 в узел n_2 — повышающий (по отношению к потоку f) путь из n_1 в n_2, длина которого минимальна среди всех таких путей.
- f-ранг $R_f(n)$ узла n (по отношению к источнику s) — длина f-кратчайшего пути из s в n, если s можно соединить с n повышающим путем, и $R_f(n) := +\infty$ в противном случае. ($R_f(s) := 0$.)
- $N_f(k)$ — совокупность всех узлов n ранга k: $R_f(n) = k$

Наблюдение

- $N_f(0) = \{s\}$; $N_f(k) \cap N_f(l) \forall\, k \neq l$;
- $\bigcup_{k<\infty} N_f(k) \ni \{r\} \Leftrightarrow$ поток f не максимален
- Поток f максимален $\Rightarrow \bigcup_{k<\infty} N_f(k) = S_*$

Метод кратчайших путей

Вспомогательный факт

Метод кратчайших путей

Вспомогательный факт

Лемма

Пусть $s = n_0, n_1, \ldots, n_k = n$ — f-кратчайший путь из источника в узел n. Тогда $R_f(n_{i+1}) = R_f(n_i) + 1$; $R_f(n_i) = i$.

Метод кратчайших путей

Вспомогательный факт

Лемма

Пусть $s = n_0, n_1, \ldots, n_k = n$ — f-кратчайший путь из источника в узел n.Тогда $R_f(n_{i+1}) = R_f(n_i) + 1$; $R_f(n_i) = i$.

Доказательство:

Метод кратчайших путей

Вспомогательный факт

Лемма

Пусть $s = n_0, n_1, \ldots, n_k = n$ — f-кратчайший путь из источника в узел n.Тогда $R_f(n_{i+1}) = R_f(n_i) + 1$; $R_f(n_i) = i$.

Доказательство: Два утверждения равносильны. Неравенство $R_f(n_i) \leq i$ очевидно.

Метод кратчайших путей

Вспомогательный факт

Лемма

Пусть $s = n_0, n_1, \ldots, n_k = n$ — f-кратчайший путь из источника в узел n.Тогда $R_f(n_{i+1}) = R_f(n_i) + 1; R_f(n_i) = i$.

Доказательство: Два утверждения равносильны. Неравенство $R_f(n_i) \leq i$ очевидно. Если равенство $R_f(n_i) = i$ нарушается, то $R_f(n_i) < i$.

Метод кратчайших путей

Вспомогательный факт

Лемма

Пусть $s = n_0, n_1, \ldots, n_k = n$ — f-кратчайший путь из источника в узел n.Тогда $R_f(n_{i+1}) = R_f(n_i) + 1; R_f(n_i) = i$.

Доказательство: Два утверждения равносильны. Неравенство $R_f(n_i) \leq i$ очевидно. Если равенство $R_f(n_i) = i$ нарушается, то $R_f(n_i) < i$. Это означает, что из узла s в n_i есть повышающий путь $s = n'_0, \ldots, n'_j = n_i$ длины $j < i$.

Метод кратчайших путей

Вспомогательный факт

Лемма

Пусть $s = n_0, n_1, \ldots, n_k = n$ — f-кратчайший путь из источника в узел n.Тогда $R_f(n_{i+1}) = R_f(n_i) + 1$; $R_f(n_i) = i$.

Доказательство: Два утверждения равносильны. Неравенство $R_f(n_i) \leq i$ очевидно. Если равенство $R_f(n_i) = i$ нарушается, то $R_f(n_i) < i$. Это означает, что из узла s в n_i есть повышающий путь $s = n'_0, \ldots, n'_j = n_i$ длины $j < i$. Тогда $s = n'_0, \ldots, n'_j = n_i, n_{i+1}, \ldots, n_k = n$ повышающий путь из s в n длины $j + (k - i) < i + (k - i) = k$.

Метод кратчайших путей

Вспомогательный факт

Лемма

Пусть $s = n_0, n_1, \ldots, n_k = n$ — f-кратчайший путь из источника в узел n. Тогда $R_f(n_{i+1}) = R_f(n_i) + 1; R_f(n_i) = i$.

Доказательство: Два утверждения равносильны. Неравенство $R_f(n_i) \leq i$ очевидно. Если равенство $R_f(n_i) = i$ нарушается, то $R_f(n_i) < i$. Это означает, что из узла s в n_i есть повышающий путь $s = n'_0, \ldots, n'_j = n_i$ длины $j < i$. Тогда $s = n'_0, \ldots, n'_j = n_i, n_{i+1}, \ldots, n_k = n$ повышающий путь из s в n длины $j + (k - i) < i + (k - i) = k$. Это противоречит тому, что k — длина кратчайшего повышающего пути из s в n.

Метод кратчайших путей

Вспомогательный факт

Лемма

Пусть $s = n_0, n_1, \ldots, n_k = n$ — f-кратчайший путь из источника в узел n.Тогда $R_f(n_{i+1}) = R_f(n_i) + 1$; $R_f(n_i) = i$.

Доказательство: Два утверждения равносильны. Неравенство $R_f(n_i) \leq i$ очевидно. Если равенство $R_f(n_i) = i$ нарушается, то $R_f(n_i) < i$. Это означает, что из узла s в n_i есть повышающий путь $s = n'_0, \ldots, n'_j = n_i$ длины $j < i$. Тогда $s = n'_0, \ldots, n'_j = n_i, n_{i+1}, \ldots, n_k = n$ повышающий путь из s в n длины $j + (k - i) < i + (k - i) = k$. Это противоречит тому, что k — длина кратчайшего повышающего пути из s в n.

Следствие

$n \in N_f(k+1) \Leftrightarrow n \notin \bigcup_{i=0}^{k} N_f(i)$ и при этом из некоторого узла $n' \in N_f(k)$ в n идет повышающий путь длины 1 (то есть дуга)

Метод кратчайших путей

Общая схема алгоритма

Метод кратчайших путей

Общая схема алгоритма

Метод кратчайших путей

Общая схема алгоритма

Метод кратчайших путей

Общая схема алгоритма

Метод кратчайших путей

Общая схема алгоритма

Метод кратчайших путей

Общая схема алгоритма

Метод кратчайших путей

Общая схема алгоритма

Метод кратчайших путей

Общая схема алгоритма

Метод кратчайших путей

Общая схема алгоритма

Прямой ход можно останавливать, как только $r \in R_f(k)$

Метод кратчайших путей

Общая схема алгоритма

Метод кратчайших путей

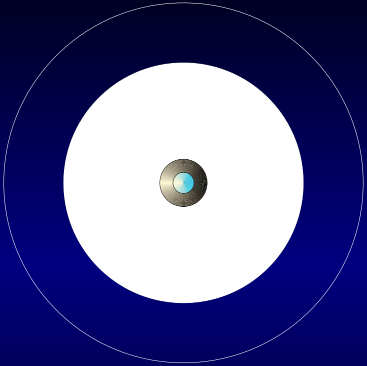
Прямой ход

Метод кратчайших путей

Прямой ход

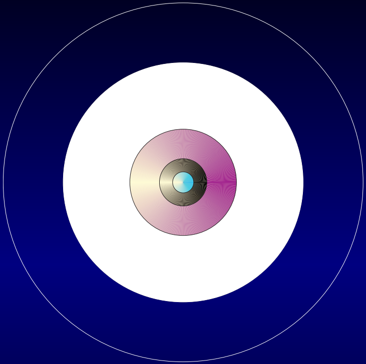
Метод кратчайших путей

Прямой ход



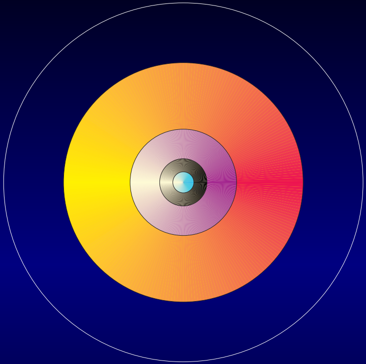
Метод кратчайших путей

Прямой ход



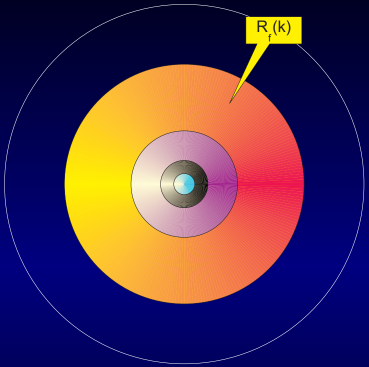
Метод кратчайших путей

Прямой ход



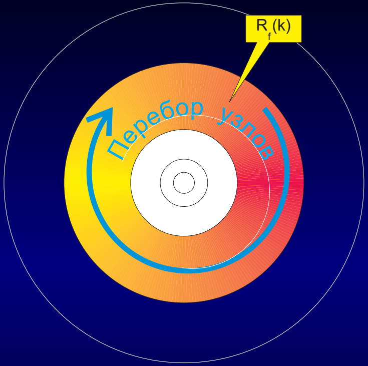
Метод кратчайших путей

Прямой ход



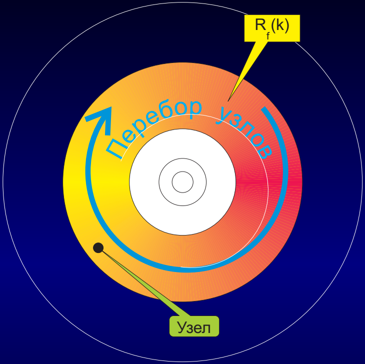
Метод кратчайших путей

Прямой ход



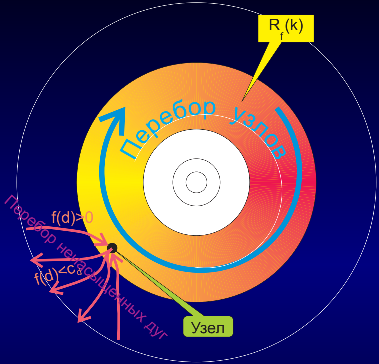
Метод кратчайших путей

Прямой ход



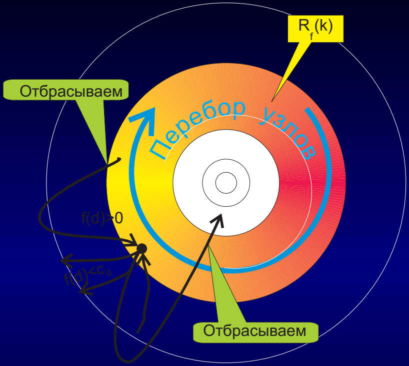
Метод кратчайших путей

Прямой ход



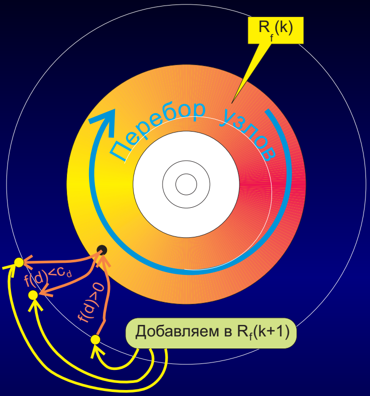
Метод кратчайших путей

Прямой ход



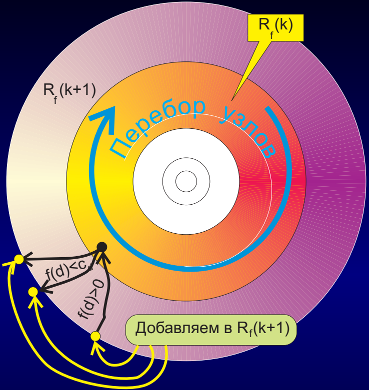
Метод кратчайших путей

Прямой ход



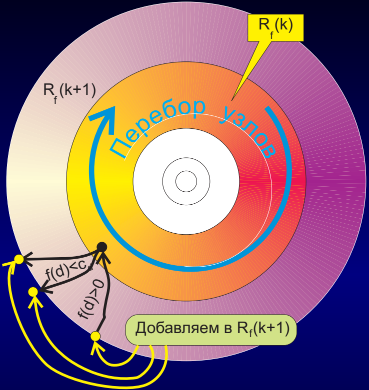
Метод кратчайших путей

Прямой ход



Метод кратчайших путей

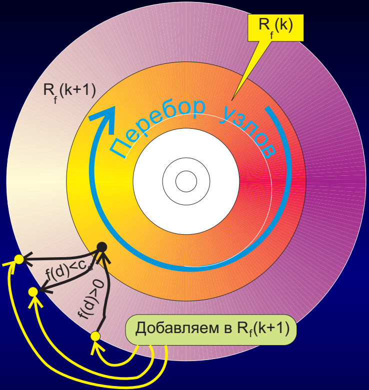
Прямой ход



Алгоритм пересчета метки

Метод кратчайших путей

Прямой ход

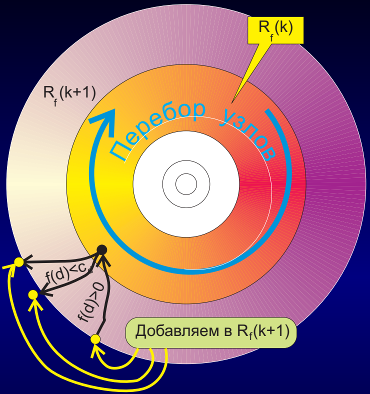


Алгоритм пересчета метки

- $\varepsilon(s) := \infty$

Метод кратчайших путей

Прямой ход



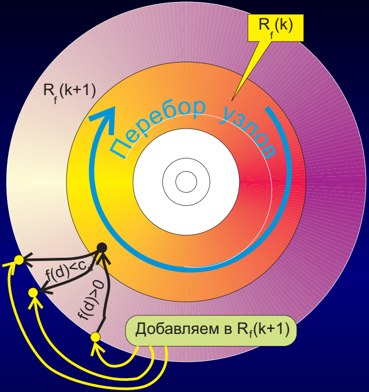
Алгоритм пересчета метки

- $\varepsilon(s) := \infty$
- $\varepsilon(n') := \min\left\{\varepsilon(n); f(d)\right\}$, если d - входящая в n дуга;

  $\varepsilon(n') := \min\left\{\varepsilon(n); c_d - f(d)\right\}$, если d - выходящая из n дуга

Метод кратчайших путей

Прямой ход



Алгоритм пересчета метки

- $\varepsilon(s) := \infty$
- $\varepsilon(n') := \min\left\{\varepsilon(n); f(d)\right\}$, если d - входящая в n дуга;

  $\varepsilon(n') := \min\left\{\varepsilon(n); c_d - f(d)\right\}$, если d - выходящая из n дуга
- Предыдущая формула применяется на каждом шаге перебора дуг, касающихся узла n, при условии, что другой узел дуги n' не лежит в $\bigcup_{i=0}^{k} N_f(i)$ и еще не включен в $R_f(k+1)$

Метод кратчайших путей

Основное свойство метки

Лемма

Метка $\varepsilon(n)$ обладает следующим свойством

Метод кратчайших путей

Основное свойство метки

Лемма

Метка $\varepsilon(n)$ обладает следующим свойством

- Существует f-кратчайший путь $s = n_0, \ldots, n_k = n$ из s в n с ассоциированной последовательностью дуг $d_1, \ldots, d_k$ такой, что

$$\varepsilon(n) = \min \left\{ \begin{array}{c} \min_{d \text{ ориентирована вдоль пути}} [c_d - f(d)] \\ \min_{d \text{ ориентирована против пути}} f(d) \end{array} \right\}$$

Метод кратчайших путей

Основное свойство метки

Лемма

Метка $\varepsilon(n)$ обладает следующим свойством

- Существует f-кратчайший путь $s = n_0, \dots, n_k = n$ из s в n с ассоциированной последовательностью дуг $d_1, \dots, d_k$ такой, что

$$\varepsilon(n) = \min \left\{ \begin{array}{c} \min_{d \text{ ориентирована вдоль пути}} [c_d - f(d)] \\ \min_{d \text{ ориентирована против пути}} f(d) \end{array} \right\}$$

Доказательство

Метод кратчайших путей

Основное свойство метки

Лемма

Метка $\varepsilon(n)$ обладает следующим свойством

- Существует f-кратчайший путь $s = n_0, \dots, n_k = n$ из s в n с ассоциированной последовательностью дуг $d_1, \dots, d_k$ такой, что

$$\varepsilon(n) = \min \left\{ \begin{array}{c} \min_{d \text{ ориентирована вдоль пути}} [c_d - f(d)] \\ \min_{d \text{ ориентирована против пути}} f(d) \end{array} \right\}$$

Доказательство индукцией по $k : N_f(k) \ni n$

Метод кратчайших путей

Основное свойство метки

Лемма

Метка $\varepsilon(n)$ обладает следующим свойством

- Существует f-кратчайший путь $s = n_0, \ldots, n_k = n$ из s в n с ассоциированной последовательностью дуг $d_1, \ldots, d_k$ такой, что

$$\varepsilon(n) = \min \left\{ \begin{array}{c} \min_{d \text{ ориентирована вдоль пути}} [c_d - f(d)] \\ \min_{d \text{ ориентирована против пути}} f(d) \end{array} \right\}$$

Доказательство индукцией по $k : N_f(k) \ni n$

Наблюдение

При $k > 0$ справедливо неравенство $\varepsilon(n) > 0$ и поэтому упомянутый путь повышающий

Метод кратчайших путей

Основное свойство метки

Лемма

Метка $\varepsilon(n)$ обладает следующим свойством

- Существует f-кратчайший путь $s = n_0, \dots, n_k = n$ из s в n с ассоциированной последовательностью дуг $d_1, \dots, d_k$ такой, что

$$\varepsilon(n) = \min \left\{ \begin{array}{c} \min_{d \text{ ориентирована вдоль пути}} [c_d - f(d)] \\ \min_{d \text{ ориентирована против пути}} f(d) \end{array} \right\}$$

Доказательство индукцией по $k : N_f(k) \ni n$

Наблюдение

При $k > 0$ справедливо неравенство $\varepsilon(n) > 0$ и поэтому упомянутый путь повышающий

Метод кратчайших путей

Следствие из основного свойства метки

Метод кратчайших путей

Следствие из основного свойства метки

Следствие

Предположим, что $k := R_f(r) < \infty$.

Метод кратчайших путей

Следствие из основного свойства метки

Следствие

Предположим, что $k := R_f(r) < \infty$.

- Тогда существует f-кратчайший путь из источника s в сток r с последовательностью дуг $d_1, \ldots, d_k$ такой, что

$$\varepsilon(r) = \min \left\{ \begin{array}{c} \min_{d \text{ ориентирована вдоль пути}} [c_d - f(d)] \\ \min_{d \text{ ориентирована против пути}} f(d) \end{array} \right\}$$

Метод кратчайших путей

Следствие из основного свойства метки

Следствие

Предположим, что $k := R_f(r) < \infty$.

- Тогда существует f-кратчайший путь из источника s в сток r с последовательностью дуг $d_1, \ldots, d_k$ такой, что

$$\varepsilon(r) = \min \left\{ \begin{array}{c} \min_{d \text{ ориентирована вдоль пути}} [c_d - f(d)] \\ \min_{d \text{ ориентирована против пути}} f(d) \end{array} \right\}$$

- Этот путь повышающий $\varepsilon(r) > 0$

Метод кратчайших путей

Следствие из основного свойства метки

Следствие

Предположим, что $k := R_f(r) < \infty$.

- Тогда существует f-кратчайший путь из источника s в сток r с последовательностью дуг $d_1, \dots, d_k$ такой, что

$$\varepsilon(r) = \min \left\{ \begin{array}{c} \min_{d \text{ ориентирована вдоль пути}} [c_d - f(d)] \\ \min_{d \text{ ориентирована против пути}} f(d) \end{array} \right\}$$

- Этот путь повышающий $\varepsilon(r) > 0$
- Изменение потока по правилу

$$f(d) := \begin{cases} f(d) & \text{если дуга } d \text{ вне пути } d_1, \dots, k \\ f(d) + \varepsilon(r) & \left\{ \begin{array}{l} \text{если дуга } d \text{ на этом пути} \\ \text{и ориентирована вдоль него} \end{array} \right. \\ f(d) - \varepsilon(r) & \left\{ \begin{array}{l} \text{если дуга } d \text{ на этом пути} \\ \text{и ориентирована против него} \end{array} \right. \end{cases}$$

определяет поток большей мощности (док-во теоремы Ф-Ф)

Метод кратчайших путей

Обратный ход алгоритма

Метод кратчайших путей

Обратный ход алгоритма

Если после завершения очередного прямого хода алгоритм не остановлен: $R_f(r) < \infty$, то

Метод кратчайших путей

Обратный ход алгоритма

Если после завершения очередного прямого хода алгоритм не остановлен: $R_f(r) < \infty$, то

- Выбираем f-кратчайший путь из источника в сток $d_1, \ldots, d_k$ из предыдущего Следствия

Метод кратчайших путей

Обратный ход алгоритма

Если после завершения очередного прямого хода алгоритм не остановлен: $R_f(r) < \infty$, то

- Выбираем f-кратчайший путь из источника в сток $d_1, \dots, d_k$ из предыдущего Следствия
- Измененяем поток по указанному в Следствии правилу

$$f(d) := \begin{cases} f(d) & \text{если дуга } d \text{ вне пути } d_1, \dots, d_k \\ f(d) + \varepsilon(r) & \left\{ \begin{array}{l} \text{если дуга } d \text{ на этом пути} \\ \text{и ориентирована вдоль него} \end{array} \right. \\ f(d) - \varepsilon(r) & \left\{ \begin{array}{l} \text{если дуга } d \text{ на этом пути} \\ \text{и ориентирована против него} \end{array} \right. \end{cases}$$

Метод кратчайших путей

Обратный ход алгоритма

Если после завершения очередного прямого хода алгоритм не остановлен: $R_f(r) < \infty$, то

- Выбираем f-кратчайший путь из источника в сток $d_1, \ldots, d_k$ из предыдущего Следствия
- Измененяем поток по указанному в Следствии правилу

$$f(d) := \begin{cases} f(d) & \text{если дуга } d \text{ вне пути } d_1, \ldots, d_k \\ f(d) + \varepsilon(r) & \left\{ \begin{array}{l} \text{если дуга } d \text{ на этом пути} \\ \text{и ориентирована вдоль него} \end{array} \right. \\ f(d) - \varepsilon(r) & \left\{ \begin{array}{l} \text{если дуга } d \text{ на этом пути} \\ \text{и ориентирована против него} \end{array} \right. \end{cases}$$

Наблюдение

В результате изменения некоторые дуги рассматриваемого пути насыщаются

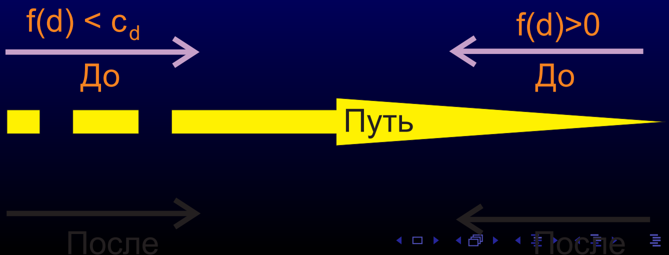
Метод кратчайших путей

Обратный ход алгоритма

Если после завершения очередного прямого хода алгоритм не остановлен: $R_f(r) < \infty$, то

- Выбираем f-кратчайший путь из источника в сток $d_1, \ldots, d_k$ из предыдущего Следствия
- Измененяем поток по указанному в Следствии правилу

$$f(d) := \begin{cases} f(d) & \text{если дуга } d \text{ вне пути } d_1, \ldots, d_k \\ f(d) + \varepsilon(r) & \left\{ \begin{array}{l} \text{если дуга } d \text{ на этом пути} \\ \text{и ориентирована вдоль него} \end{array} \right. \\ f(d) - \varepsilon(r) & \left\{ \begin{array}{l} \text{если дуга } d \text{ на этом пути} \\ \text{и ориентирована против него} \end{array} \right. \end{cases}$$



Метод кратчайших путей

Обратный ход алгоритма

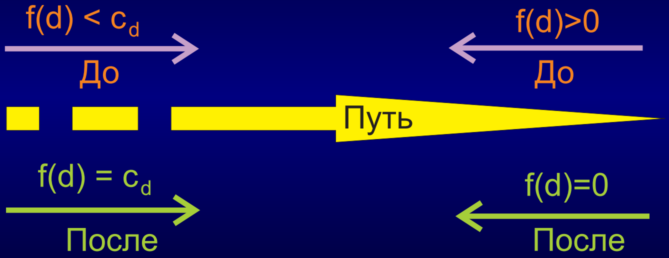
Если после завершения очередного прямого хода алгоритм не остановлен: $R_f(r) < \infty$, то

- Выбираем f-кратчайший путь из источника в сток $d_1, \ldots, d_k$ из предыдущего Следствия
- Измененяем поток по указанному в Следствии правилу

$$f(d) := \begin{cases} f(d) & \text{если дуга } d \text{ вне пути } d_1, \ldots, d_k \\ f(d) + \varepsilon(r) & \left\{ \begin{array}{l} \text{если дуга } d \text{ на этом пути} \\ \text{и ориентирована вдоль него} \end{array} \right. \\ f(d) - \varepsilon(r) & \left\{ \begin{array}{l} \text{если дуга } d \text{ на этом пути} \\ \text{и ориентирована против него} \end{array} \right. \end{cases}$$

Метод кратчайших путей

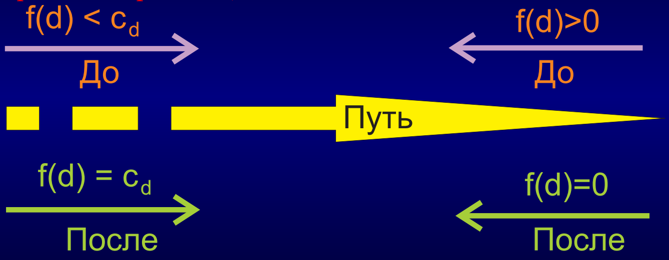
Дополнительные наблюдения



Метод кратчайших путей

Дополнительные наблюдения

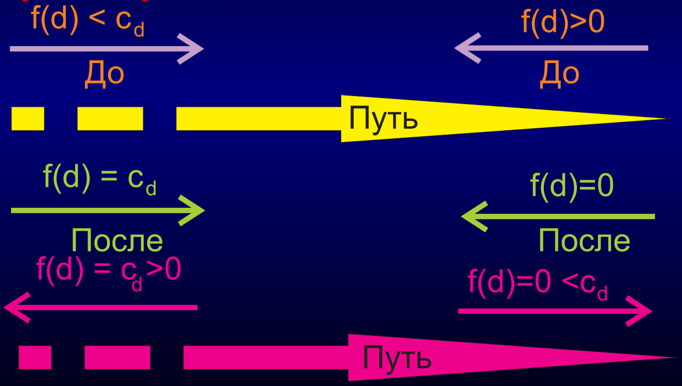
Доведенная до насыщения дуга может встраиваться в повышающие пути измененного потока только в реверсивной ориентации



Метод кратчайших путей

Дополнительные наблюдения

Доведенная до насыщения дуга может встраиваться в повышающие пути измененного потока только в реверсивной ориентации



Метод кратчайших путей

Основное свойство метода кратчайших путей

Метод кратчайших путей

Основное свойство метода кратчайших путей

Определение

Шаг алгоритма=Прямой ход + обратный ход

Метод кратчайших путей

Основное свойство метода кратчайших путей

Определение

Шаг алгоритма=Прямой ход + обратный ход

Теорема

Рассмотрим незавершающий шаг алгоритма и обозначим через f^+ и f поток после и до совершения этого шага. Рассмотрим также некоторый f^+-кратчайший путь из источника в сток и обозначим через p число встроенных в этот путь дуг, насыщенных на рассматриваемом шаге. Тогда

$$R_{f^+}(r) \geq R_f(r) + 2p.$$

Метод кратчайших путей

Основное свойство метода кратчайших путей

Определение

Шаг алгоритма=Прямой ход + обратный ход

Теорема

Рассмотрим незавершающий шаг алгоритма и обозначим через f^+ и f поток после и до совершения этого шага. Рассмотрим также некоторый f^+-кратчайший путь из источника в сток и обозначим через p число встроенных в этот путь дуг, насыщенных на рассматриваемом шаге. Тогда

$$R_{f^+}(r) \geq R_f(r) + 2p.$$

Метод кратчайших путей

Основное свойство метода кратчайших путей

Определение

Шаг алгоритма=Прямой ход + обратный ход

Теорема

Рассмотрим незавершающий шаг алгоритма и обозначим через f^+ и f поток после и до совершения этого шага. Рассмотрим также некоторый f^+-кратчайший путь из источника в сток и обозначим через p число встроенных в этот путь дуг, насыщенных на рассматриваемом шаге. Тогда

$$R_{f^+}(r) \geq R_f(r) + 2p.$$

Следствие

Метод кратчайших путей

Основное свойство метода кратчайших путей

Определение

Шаг алгоритма=Прямой ход + обратный ход

Теорема

Рассмотрим незавершающий шаг алгоритма и обозначим через f^+ и f поток после и до совершения этого шага. Рассмотрим также некоторый f^+-кратчайший путь из источника в сток и обозначим через p число встроенных в этот путь дуг, насыщенных на рассматриваемом шаге. Тогда

$$R_{f^+}(r) \geq R_f(r) + 2p.$$

Следствие

- Ранг стока не убывает: $R_{f^+}(r) \geq R_f(r)$

Метод кратчайших путей

Основное свойство метода кратчайших путей

Теорема

Рассмотрим незавершающий шаг алгоритма и обозначим через f^+ и f поток после и до совершения этого шага. Рассмотрим также некоторый f^+-кратчайший путь из источника в сток и обозначим через p число встроенных в этот путь дуг, насыщенных на рассматриваемом шаге. Тогда

$$R_{f^+}(r) \geq R_f(r) + 2p.$$

Следствие

- Ранг стока не убывает: $R_{f^+}(r) \geq R_f(r)$
- Если он остается неизменным $R_{f^+}(r) = R_f(r)$, то любой f^+-кратчайший путь из источника в сток не содержит дуг, насыщенных на рассматриваемом шаге.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Если дуга d

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Если дуга d

- встроена в некоторый f^+-повышающий путь

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Если дуга d

- встроена в некоторый f^+-повышающий путь
- и не присутствовала в f-кратчайшем пути из источника в сток, использованном на рассматриваемом шаге для изменения потока,

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Если дуга d

- встроена в некоторый f^+-повышающий путь
- и не присутствовала в f-кратчайшем пути из источника в сток, использованном на рассматриваемом шаге для изменения потока,

то она в той же ориентации может быть использована для построения f-повышающих путей.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Если дуга d

- встроена в некоторый f^{+}-повышающий путь
- и не присутствовала в f-кратчайшем пути из источника в сток, использованном на рассматриваемом шаге для изменения потока,

то она в той же ориентации может быть использована для построения f-повышающих путей. (Так как $f^{+}(d) = f(d)$)

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Если дуга d

- встроена в некоторый f^+-повышающий путь
- присутствовала в f-кратчайшем пути из источника в сток, использованном на рассматриваемом шаге для изменения потока,

то она в той же ориентации может быть использована для построения f-повышающих путей.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Если дуга d

- встроена в некоторый f^+-повышающий путь
- присутствовала в f-кратчайшем пути из источника в сток, использованном на рассматриваемом шаге для изменения потока,
- и при этом $0 < f(d) < c_d$

то она в той же ориентации может быть использована для построения f-повышающих путей.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Если дуга d

- встроена в некоторый f^+-повышающий путь
- присутствовала в f-кратчайшем пути из источника в сток, использованном на рассматриваемом шаге для изменения потока,
- и при этом $0 < f(d) < c_d$

то она в той же ориентации может быть использована для построения f-повышающих путей. Так как ее можно использовать в любой ориентации

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \xrightarrow{d_1} n_1 \xrightarrow{d_2} n_2 \xleftarrow{d_3} n_3 \xrightarrow{d_4} n_4 \xleftarrow{d_5} \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} n_{k-1} \xleftarrow{d_k} n_k = r \qquad (1)$$

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \xrightarrow{d_1} n_1 \xrightarrow{d_2} n_2 \xleftarrow{d_3} n_3 \xrightarrow{d_4} n_4 \xleftarrow{d_5} \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} n_{k-1} \xleftarrow{d_k} n_k = r \qquad (1)$$

Дугу $d = d_i$ этого пути назовем нереверсивной, если она

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \xrightarrow{d_1} n_1 \xrightarrow{d_2} n_2 \xleftarrow{d_3} n_3 \xrightarrow{d_4} n_4 \xleftarrow{d_5} \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} n_{k-1} \xleftarrow{d_k} n_k = r \qquad (1)$$

Дугу $d = d_i$ этого пути назовем нереверсивной, если она либо не присутствовала в f-кратчайшем пути из источника в сток, использованном на рассматриваемом шаге для изменения потока,

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \xrightarrow{d_1} n_1 \xrightarrow{d_2} n_2 \xleftarrow{d_3} n_3 \xrightarrow{d_4} n_4 \xleftarrow{d_5} \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} n_{k-1} \xleftarrow{d_k} n_k = r \qquad (1)$$

Дугу $d = d_i$ этого пути назовем нереверсивной, если она либо не присутствовала в f-кратчайшем пути из источника в сток, использованном на рассматриваемом шаге для изменения потока, либо присутствовала в нем в той же ориентации, что и на пути (1).

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \overset{d_1}{\longrightarrow} n_1 \overset{d_2}{\longrightarrow} n_2 \overset{d_3}{\longleftarrow} n_3 \overset{d_4}{\longrightarrow} n_4 \overset{d_5}{\longleftarrow} \cdots \overset{d_{k-1}}{\longrightarrow} n_{k-1} \overset{d_k}{\longleftarrow} n_k = r \qquad (1)$$

Дугу $d = d_i$ этого пути назовем нереверсивной, если она либо не присутствовала в f-кратчайшем пути из источника в сток, использованном на рассматриваемом шаге для изменения потока, либо присутствовала в нем в той же ориентации, что и на пути (1). В противном случае дугу назовем реверсивной.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \xrightarrow{d_1} n_1 \xrightarrow{d_2} n_2 \xleftarrow{d_3} n_3 \xrightarrow{d_4} n_4 \xleftarrow{d_5} \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} n_{k-1} \xleftarrow{d_k} n_k = r \qquad (1)$$

Дугу $d = d_i$ этого пути назовем нереверсивной, если она либо не присутствовала в f-кратчайшем пути из источника в сток, использованном на рассматриваемом шаге для изменения потока, либо присутствовала в нем в той же ориентации, что и на пути (1). В противном случае дугу назовем реверсивной. Любая насыщенная на рассматриваемом шаге дуга является реверсивной.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \xrightarrow{d_1} n_1 \xrightarrow{d_2} n_2 \xleftarrow{d_3} n_3 \xrightarrow{d_4} n_4 \xleftarrow{d_5} \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} n_{k-1} \xleftarrow{d_k} n_k = r \qquad (1)$$

Дугу $d = d_i$ этого пути назовем нереверсивной, если она либо не присутствовала в f-кратчайшем пути из источника в сток, использованном на рассматриваемом шаге для изменения потока, либо присутствовала в нем в той же ориентации, что и на пути (1). В противном случае дугу назовем реверсивной. Любая насыщенная на рассматриваемом шаге дуга является реверсивной.

Любая группа из следующих в (1) подряд друг за другом нереверсивных дуг образует f-повышающий путь

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \xrightarrow{d_1} n_1 \xrightarrow{d_2} n_2 \xleftarrow{d_3} n_3 \xrightarrow{d_4} n_4 \xleftarrow{d_5} \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} n_{k-1} \xleftarrow{d_k} n_k = r \qquad (1)$$

Случай 1: на пути (1) нет реверсивных дуг.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \xrightarrow{d_1} n_1 \xrightarrow{d_2} n_2 \xleftarrow{d_3} n_3 \xrightarrow{d_4} n_4 \xleftarrow{d_5} \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} n_{k-1} \xleftarrow{d_k} n_k = r \qquad (1)$$

Случай 1: на пути (1) нет реверсивных дуг. Путь не содержит дуг, насыщенных на рассматриваемом шаге $p = 0$.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \xrightarrow{d_1} n_1 \xrightarrow{d_2} n_2 \xleftarrow{d_3} n_3 \xrightarrow{d_4} n_4 \xleftarrow{d_5} \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} n_{k-1} \xleftarrow{d_k} n_k = r \qquad (1)$$

Случай 1: на пути (1) нет реверсивных дуг. Путь не содержит дуг, насыщенных на рассматриваемом шаге $p = 0$. Этот путь является f-повышающим.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \xrightarrow{d_1} n_1 \xrightarrow{d_2} n_2 \xleftarrow{d_3} n_3 \xrightarrow{d_4} n_4 \xleftarrow{d_5} \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} n_{k-1} \xleftarrow{d_k} n_k = r \qquad (1)$$

Случай 1: на пути (1) нет реверсивных дуг. Путь не содержит дуг, насыщенных на рассматриваемом шаге $p = 0$. Этот путь является f-повышающим.
$k = R_{f^+} \geq R_f(r) = R_f(r) + 2p$. QED

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \xrightarrow{d_1} n_1 \xrightarrow{d_2} n_2 \xleftarrow{d_3} n_3 \xrightarrow{d_4} n_4 \xleftarrow{d_5} \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} n_{k-1} \xleftarrow{d_k} n_k = r \qquad (1)$$

Случай 2: на пути (1) есть реверсивные дуги.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \xrightarrow{d_1} n_1 \xrightarrow{d_2} n_2 \xrightarrow{d_3} n_3 \cdots \leftarrow n_{i-1} \overset{d_i}{\longleftrightarrow} n_i \leftarrow \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} n_{k-1} \xleftarrow{d_k} n_k = r \tag{1}$$

Случай 2: на пути (1) есть реверсивные дуги. Рассмотрим первую из них.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \xrightarrow{d_1} n_1 \xrightarrow{d_2} n_2 \xrightarrow{d_3} n_3 \cdots \leftarrow n_{i-1} \overset{d_i}{\leftrightarrow} n_i \leftarrow \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} n_{k-1} \xleftarrow{d_k} n_k = r \quad (1)$$

Случай 2: на пути (1) есть реверсивные дуги. Рассмотрим первую из них. Путь до узла n_{i-1} составлен из нереверсивных дуг и поэтому является f-повышающим.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \xrightarrow{d_1} n_1 \xrightarrow{d_2} n_2 \xrightarrow{d_3} n_3 \cdots \leftarrow n_{i-1} \overset{d_i}{\leftrightarrow} n_i \leftarrow \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} n_{k-1} \xleftarrow{d_k} n_k = r \tag{1}$$

Случай 2: на пути (1) есть реверсивные дуги.

Рассмотрим первую из них. Путь до узла n_{i-1} составлен из нереверсивных дуг и поэтому является f-повышающим. Значит $R_f(n_{i-1}) \le i - 1$.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \xrightarrow{d_1} n_1 \xrightarrow{d_2} n_2 \xrightarrow{d_3} n_3 \cdots \leftarrow n_{i-1} \overset{d_i}{\longleftrightarrow} n_i \leftarrow \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} n_{k-1} \xleftarrow{d_k} n_k = r \qquad (1)$$

Случай 2: на пути (1) есть реверсивные дуги. Рассмотрим первую из них. Путь до узла n_{i-1} составлен из нереверсивных дуг и поэтому является f-повышающим. Значит $R_f(n_{i-1}) \leq i - 1$. Так как дуга d_i реверсивна, в f-кратчайший путь из источника в сток, использованный для изменения потока на рассматриваемом шаге, она встроена в обратной ориентации, т.е. ее узлы идут в порядке n_i, n_{i-1}.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \overset{d_1}{\rightarrow} n_1 \overset{d_2}{\rightarrow} n_2 \overset{d_3}{\rightarrow} n_3 \cdots \leftarrow n_{i-1} \overset{d_i}{\leftrightarrow} n_i \leftarrow \cdots \overset{d_{k-1}}{\rightarrow} n_{k-1} \overset{d_k}{\leftarrow} n_k = r \tag{1}$$

Случай 2: на пути (1) есть реверсивные дуги. Рассмотрим первую из них. Путь до узла n_{i-1} составлен из нереверсивных дуг и поэтому является f-повышающим. Значит $R_f(n_{i-1}) \leq i-1$. Так как дуга d_i реверсивна, в f-кратчайший путь из источника в сток, использованный для изменения потока на рассматриваемом шаге, она встроена в обратной ориентации, т.е. ее узлы идут в порядке n_i, n_{i-1}. Так как на кратчайшем пути ранги узлов возрастают на 1 за шаг, $R_f(n_{i-1}) = R_{n_i} + 1$.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \xrightarrow{d_1} n_1 \xrightarrow{d_2} n_2 \xrightarrow{d_3} n_3 \cdots \leftarrow n_{i-1} \overset{d_i}{\longleftrightarrow} n_i \leftarrow \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} n_{k-1} \xleftarrow{d_k} n_k = r \tag{1}$$

Случай 2: на пути (1) есть реверсивные дуги.

Рассмотрим первую из них. Путь до узла n_{i-1} составлен из нереверсивных дуг и поэтому является f-повышающим. Значит $R_f(n_{i-1}) \leq i-1$. Так как дуга d_i реверсивна, в f-кратчайший путь из источника в сток, использованный для изменения потока на рассматриваемом шаге, она встроена в обратной ориентации, т.е. ее узлы идут в порядке n_i, n_{i-1}. Так как на кратчайшем пути ранги узлов возрастают на 1 за шаг, $R_f(n_{i-1}) = R_{n_i} + 1$. В итоге $R_{n_i} \leq i-2$.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \xrightarrow{d_1} n_1 \xrightarrow{d_2} n_2 \xrightarrow{d_3} n_3 \cdots \leftarrow n_{i-1} \overset{d_i}{\leftrightarrow} \overset{R_f(n_i) \leq i-2}{n_i} \leftarrow \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} n_{k-1} \overset{d_k}{\leftarrow} n_k = r \tag{1}$$

Случай 2: на пути (1) есть реверсивные дуги. Рассмотрим первую из них. Путь до узла n_{i-1} составлен из нереверсивных дуг и поэтому является f-повышающим. Значит $R_f(n_{i-1}) \leq i-1$. Так как дуга d_i реверсивна, в f-кратчайший путь из источника в сток, использованный для изменения потока на рассматриваемом шаге, она встроена в обратной ориентации, т.е. ее узлы идут в порядке n_i, n_{i-1}. Так как на кратчайшем пути ранги узлов возрастают на 1 за шаг, $R_f(n_{i-1}) = R_{n_i} + 1$. В итоге $R_{n_i} \leq i-2$.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \to \cdots \leftarrow n_{i-1} \overset{d_i}{\leftrightarrow} \overset{R_f(n_i) \leq i-2}{n_i} \leftarrow \cdots \overset{d_{k-1}}{\to} n_{k-1} \overset{d_k}{\leftarrow} n_k = r \quad (1)$$

Случай 2: на пути (1) есть реверсивные дуги.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \rightarrow \cdots \leftarrow n_{i-1} \overset{d_i}{\leftrightarrow} \overset{R_f(n_i) \leq i-2}{n_i} \leftarrow \cdots \overset{d_{k-1}}{\rightarrow} n_{k-1} \overset{d_k}{\leftarrow} n_k = r \quad (1)$$

Случай 2: на пути (1) есть реверсивные дуги. Теперь продвинемся по пути до следующей реверсивной дуги.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \to \cdots \leftarrow \overset{R_f(n_i) \leq i-2}{n_i} \to \cdots \to n_{j-1} \overset{d_j}{\leftrightarrow} n_j \to \cdots \qquad (1)$$

Случай 2: на пути (1) есть реверсивные дуги. Теперь продвинемся по пути до следующей реверсивной дуги. Участок этого пути между узлами n_i и n_{j-1} составлен из нереверсивных дуг и поэтому является f-повышающим.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \to \cdots \leftarrow \overset{R_f(n_i) \le i-2}{n_i} \longrightarrow \cdots \longrightarrow n_{j-1} \overset{d_j}{\leftrightarrow} n_j \to \cdots \qquad (1)$$

Случай 2: на пути (1) есть реверсивные дуги. Теперь продвинемся по пути до следующей реверсивной дуги. Участок этого пути между узлами n_i и n_{j-1} составлен из нереверсивных дуг и поэтому является f-повышающим. Следовательно,
$R_f(n_{j-1}) \le R_f(n_i) + j - 1 - i \le (i-2) + (j-1-i) = j-3.$

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \to \cdots \leftarrow \overset{R_f(n_i) \le i-2}{n_i} \to \cdots \to n_{j-1} \overset{d_j}{\leftrightarrow} n_j \to \cdots \qquad (1)$$

Случай 2: на пути (1) есть реверсивные дуги. Теперь продвинемся по пути до следующей реверсивной дуги. Участок этого пути между узлами n_i и n_{j-1} составлен из нереверсивных дуг и поэтому является f-повышающим. Следовательно,
$R_f(n_{j-1}) \le R_f(n_i) + j - 1 - i \le (i-2) + (j-1-i) = j-3$.
Далее повторяя проведенные рассуждения, касающиеся реверсивной дуги, убеждаемся, что $R_f(n_j) \le j-4$.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \to \dots \leftarrow \overset{R_f(n_i) \le i-2}{n_i} \to \dots \to n_{j-1} \overset{d_j}{\leftrightarrow} \overset{R_f(n_j) \le j-4}{n_j} \to \dots \quad (1)$$

Случай 2: на пути (1) есть реверсивные дуги. Теперь продвинемся по пути до следующей реверсивной дуги. Участок этого пути между узлами n_i и n_{j-1} составлен из нереверсивных дуг и поэтому является f-повышающим. Следовательно,
$R_f(n_{j-1}) \le R_f(n_i) + j - 1 - i \le (i-2) + (j-1-i) = j-3$.
Далее повторяя проведенные рассуждения, касающиеся реверсивной дуги, убеждаемся, что $R_f(n_j) \le j-4$.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \to \cdots \leftarrow \overset{R_f(n_i)\le i-2}{n_i} \to \cdots \to n_{j-1} \overset{d_j}{\leftrightarrow} \overset{R_f(n_j)\le j-4}{n_j} \to \cdots \qquad (1)$$

Случай 2: на пути (1) есть реверсивные дуги.

Продолжая рассуждать аналогично, убеждаемся, что

$$R_f(r) = R_f(n_k) \le k - 2\rho = R_{f^+}(r) - 2\rho,$$

где ρ — число реверсивных дуг.

Метод кратчайших путей (МКП)

Основное свойство МКП: Доказательство Теоремы

Обозначим $k = R_{f^+}(r)$ и рассмотрим f^+-кратчайший путь из источника в сток

$$s = n_0 \to \cdots \leftarrow \overset{R_f(n_i) \leq i-2}{n_i} \to \cdots \to n_{j-1} \overset{d_j}{\longleftrightarrow} \overset{R_f(n_j) \leq j-4}{n_j} \to \cdots \quad (1)$$

Случай 2: на пути (1) есть реверсивные дуги.

Продолжая рассуждать аналогично, убеждаемся, что

$$R_f(r) = R_f(n_k) \leq k - 2\rho = R_{f^+}(r) - 2\rho,$$

где ρ — число реверсивных дуг. Остается заметить, что $\rho \geq p$.

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $s = n_0 \to n_1 \leftarrow \cdots \to n_q = n$ — f^+-кратчайший путь из источника в некоторый узел n. Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i.

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $s = n_0 \to n_1 \leftarrow \cdots \to n_q = n$ — f^+-кратчайший путь из источника в некоторый узел n. Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i. Более того, данное утверждение верно не только для f^+-кратчайших путей, но и для любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $s = n_0 \rightarrow n_1 \leftarrow \cdots \rightarrow n_q = n$ — f^+-кратчайший путь из источника в некоторый узел n. Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i. Более того, данное утверждение верно не только для f^+-кратчайших путей, но и для любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $s = n_0 \to n_1 \leftarrow \cdots \to n_q = n$ — f^+-кратчайший путь из источника в некоторый узел n. Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i. Более того, данное утверждение верно не только для f^+-кратчайших путей, но и для любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $s = n_0 \to n_1 \leftarrow \cdots \to n_q = n$ — f^+-кратчайший путь из источника в некоторый узел n. Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i. Более того, данное утверждение верно не только для f^+-кратчайших путей, но и для любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $s = n_0 \to n_1 \leftarrow \dots \to n_q = n$ — f^+-кратчайший путь из источника в некоторый узел n. Тогда $R_f(n_i) \le i$ для всех i. Более того, данное утверждение верно не только для f^+-кратчайших путей, но и для любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Следствие

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $s = n_0 \to n_1 \leftarrow \cdots \to n_q = n$ — f^+-кратчайший путь из источника в некоторый узел n. Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i.
Более того, данное утверждение верно не только для f^+-кратчайших путей, но и для любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Следствие

- В результате исполнения одного шага алгоритма ранги узлов не уменьшаются: $R_f(n) \leq R_{f^+}(n)$

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $s = n_0 \to n_1 \leftarrow \cdots \to n_q = n$ — f^+-кратчайший путь из источника в некоторый узел n. Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i. любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Следствие

- В результате исполнения одного шага алгоритма ранги узлов не уменьшаются: $R_f(n) \leq R_{f^+}(n)$
- В результате исполнения нескольких шагов алгоритма ранги узлов не уменьшаются

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Следствие

- Работа алгоритма подразделяется на фазы. В течение каждой фазы ранг стока постоянен. Он увеличивается при переходе от фазы к фазе.

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Следствие

- Работа алгоритма подразделяется на фазы. В течение каждой фазы ранг стока постоянен. Он увеличивается при переходе от фазы к фазе.
- Число шагов алгоритма равно сумме длин всех фаз

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Следствие

- Работа алгоритма подразделяется на фазы. В течение каждой фазы ранг стока постоянен. Он увеличивается при переходе от фазы к фазе.
- Число шагов алгоритма равно сумме длин всех фаз
- Число фаз не превосходит числа узлов

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Рассмотрим некоторую фазу, а также потоки $f_1, \ldots, f_k$ и f_i-кратчайшие пути p_i из источника в сток, обрабатываеме на соответствующих шагах этой фазы. Для любых $i < j$, путь p_j обладает по отношению к пути p_i свойством из Леммы.

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Рассмотрим некоторую фазу, а также потоки $f_1, \ldots, f_k$ и f_i-кратчайшие пути p_i из источника в сток, обрабатываеме на соответствующих шагах этой фазы. Для любых $i < j$, путь p_j обладает по отношению к пути p_i свойством из Леммы.

Если $j = i + 1$ — установлено при доказательстве Теоремы

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Рассмотрим некоторую фазу, а также потоки $f_1, \ldots, f_k$ и f_i-кратчайшие пути p_i из источника в сток, обрабатываеме на соответствующих шагах этой фазы. Для любых $i < j$, путь p_j обладает по отношению к пути p_i свойством из Леммы.

Пусть $j = i + 2$. Рассмотрим дугу d с пути p_j.

$$d \text{ не лежит на } p_i \cup p_{i+1}$$

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Рассмотрим некоторую фазу, а также потоки $f_1, \ldots, f_k$ и f_i-кратчайшие пути p_i из источника в сток, обрабатываеме на соответствующих шагах этой фазы. Для любых $i < j$, путь p_j обладает по отношению к пути p_i свойством из Леммы.

Пусть $j = i + 2$. Рассмотрим дугу d с пути p_j.

$$d \text{ не лежит на } p_i \cup p_{i+1} \Rightarrow f_{i+2}(d) = f_i(d)$$

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Рассмотрим некоторую фазу, а также потоки $f_1, \ldots, f_k$ и f_i-кратчайшие пути p_i из источника в сток, обрабатываеме на соответствующих шагах этой фазы. Для любых $i < j$, путь p_j обладает по отношению к пути p_i свойством из Леммы.

Пусть $j = i + 2$. Рассмотрим дугу d с пути p_j.

$$d \text{ не лежит на } p_i \cup p_{i+1} \Rightarrow f_{i+2}(d) = f_i(d) \Rightarrow (1)$$

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Рассмотрим некоторую фазу, а также потоки $f_1, \ldots, f_k$ и f_i-кратчайшие пути p_i из источника в сток, обрабатываеме на соответствующих шагах этой фазы. Для любых $i < j$, путь p_j обладает по отношению к пути p_i свойством из Леммы.

Пусть $j = i + 2$. Рассмотрим дугу d с пути p_j.

d лежит на p_i

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Рассмотрим некоторую фазу, а также потоки $f_1, \ldots, f_k$ и f_i-кратчайшие пути p_i из источника в сток, обрабатываеме на соответствующих шагах этой фазы. Для любых $i < j$, путь p_j обладает по отношению к пути p_i свойством из Леммы.

Пусть $j = i + 2$. Рассмотрим дугу d с пути p_j.

d лежит на p_i в прямой ориентации
в обратной ориентации

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Рассмотрим некоторую фазу, а также потоки $f_1, \ldots, f_k$ и f_i-кратчайшие пути p_i из источника в сток, обрабатываеме на соответствующих шагах этой фазы. Для любых $i < j$, путь p_j обладает по отношению к пути p_i свойством из Леммы.

Пусть $j = i + 2$. Рассмотрим дугу d с пути p_j.

d лежит на p_i в прямой ориентации $\Rightarrow (1)$

в обратной ориентации

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Рассмотрим некоторую фазу, а также потоки $f_1, \ldots, f_k$ и f_i-кратчайшие пути p_i из источника в сток, обрабатываеме на соответствующих шагах этой фазы. Для любых $i < j$, путь p_j обладает по отношению к пути p_i свойством из Леммы.

Пусть $j = i + 2$. Рассмотрим дугу d с пути p_j.

$$d \text{ лежит на } p_i \begin{array}{ll} \text{в прямой ориентации} & \Rightarrow (1) \\ \text{в обратной ориентации} & \Rightarrow (2) \end{array}$$

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Рассмотрим некоторую фазу, а также потоки $f_1, \ldots, f_k$ и f_i-кратчайшие пути p_i из источника в сток, обрабатываеме на соответствующих шагах этой фазы. Для любых $i < j$, путь p_j обладает по отношению к пути p_i свойством из Леммы.
Пусть $j = i + 2$. Рассмотрим дугу d с пути p_j.

$$d \in p_{i+1} \setminus p_i$$

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Рассмотрим некоторую фазу, а также потоки $f_1, \ldots, f_k$ и f_i-кратчайшие пути p_i из источника в сток, обрабатываеме на соответствующих шагах этой фазы. Для любых $i < j$, путь p_j обладает по отношению к пути p_i свойством из Леммы.

Пусть $j = i + 2$. Рассмотрим дугу d с пути p_j.

$d \in p_{i+1} \setminus p_i$ Если ориентации d на p_{i+2} и p_{i+1} различны

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Рассмотрим некоторую фазу, а также потоки $f_1, \ldots, f_k$ и f_i-кратчайшие пути p_i из источника в сток, обрабатываеме на соответствующих шагах этой фазы. Для любых $i < j$, путь p_j обладает по отношению к пути p_i свойством из Леммы.

Пусть $j = i + 2$. Рассмотрим дугу d с пути p_j.

$d \in p_{i+1} \setminus p_i$ Если ориентации d на p_{i+2} и p_{i+1} различны то $R_{f_{i+2}}(r) > R_{f_{i+1}}(r)$ в нарушение определения фазы

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Рассмотрим некоторую фазу, а также потоки $f_1, \ldots, f_k$ и f_i-кратчайшие пути p_i из источника в сток, обрабатываеме на соответствующих шагах этой фазы. Для любых $i < j$, путь p_j обладает по отношению к пути p_i свойством из Леммы.

Пусть $j = i + 2$. Рассмотрим дугу d с пути p_j.

$$d \in p_{i+1} \setminus p_i \Rightarrow \begin{array}{c} d \text{ входит в } p_{i+1} \\ \text{в той же ориентации} \end{array}$$

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Рассмотрим некоторую фазу, а также потоки $f_1, \ldots, f_k$ и f_i-кратчайшие пути p_i из источника в сток, обрабатываеме на соответствующих шагах этой фазы. Для любых $i < j$, путь p_j обладает по отношению к пути p_i свойством из Леммы.

Пусть $j = i + 2$. Рассмотрим дугу d с пути p_j.

$$d \in p_{i+1} \setminus p_i \Rightarrow \begin{array}{c} d \text{ входит в } p_{i+1} \\ \text{в той же ориентации} \end{array} \Rightarrow f_{i+1}(d) = f_i(d)$$

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Рассмотрим некоторую фазу, а также потоки $f_1, \dots, f_k$ и f_i-кратчайшие пути p_i из источника в сток, обрабатываеме на соответствующих шагах этой фазы. Для любых $i < j$, путь p_j обладает по отношению к пути p_i свойством из Леммы.

Пусть $j = i + 2$. Рассмотрим дугу d с пути p_j.

$$d \in p_{i+1} \setminus p_i \Rightarrow \begin{array}{c} d \text{ входит в } p_{i+1} \\ \text{в той же ориентации} \end{array} \Rightarrow f_{i+1}(d) = f_i(d) \Rightarrow (1)$$

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \leq i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Рассмотрим некоторую фазу, а также потоки $f_1, \ldots, f_k$ и f_i-кратчайшие пути p_i из источника в сток, обрабатываеме на соответствующих шагах этой фазы. Для любых $i < j$, путь p_j обладает по отношению к пути p_i свойством из Леммы.

На случаи $j = i + 3, i + 4, \ldots$ утверждение распространяется аналогично

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Лемма

Тогда $R_f(n_i) \le i$ для всех i и любых путей из источника, таких, что любая дуга пути либо

1. может в той же ориентации участвовать в формировании f-повышающих путей, либо
2. в обратной ориентации входит в f-кратчайший путь из источника в сток.

Если есть дуга второго типа, то $R_f(n_q) < q$.

Рассмотрим некоторую фазу, а также потоки $f_1, \ldots, f_k$ и f_i-кратчайшие пути p_i из источника в сток, обрабатываеме на соответствующих шагах этой фазы. Для любых $i < j$, путь p_j обладает по отношению к пути p_i свойством из Леммы. Так как по определению фазы $R_{f_i}(r)$ не зависит от i, то в соответствии с последним утверждением Леммы (где берем $n_q := r$), пути p_j и p_i не содержат общих дуг в противоположной ориентации

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

пути p_j и p_i не содержат общих дуг в противоположной ориентации Дуга с пути p_i, подвергнутая насыщению на соответствующем шаге алгоритма не попадает на последующие пути $p_j, j > i$ в пределах одной фазы

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Дуга с пути p_i, подвергнутая насыщению на соответствующем шаге алгоритма не попадает на последующие пути $p_j, j > i$ в пределах одной фазы В пределах одной фазы насыщаемые дуги не повторяются

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Дуга с пути p_i, подвергнутая насыщению на соответствующем шаге алгоритма не попадает на последующие пути $p_j, j > i$ в пределах одной фазы В пределах одной фазы насыщаемые дуги не повторяются
Вместе с тем на i-ом шаге как минимум одна дуга с p_i насыщается

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Дуга с пути p_i, подвергнутая насыщению на соответствующем шаге алгоритма не попадает на последующие пути $p_j, j > i$ в пределах одной фазы В пределах одной фазы насыщаемые дуги не повторяются Вместе с тем на i-ом шаге как минимум одна дуга с p_i насыщается Длительность фазы не превосходит числа дуг.

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Дуга с пути p_i, подвергнутая насыщению на соответствующем шаге алгоритма не попадает на последующие пути $p_j, j > i$ в пределах одной фазы В пределах одной фазы насыщаемые дуги не повторяются Вместе с тем на i-ом шаге как минимум одна дуга с p_i насыщается Длительность фазы не превосходит числа дуг. Число фаз не превосходит числа узлов

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Дуга с пути p_i, подвергнутая насыщению на соответствующем шаге алгоритма не попадает на последующие пути $p_j, j > i$ в пределах одной фазы В пределах одной фазы насыщаемые дуги не повторяются Вместе с тем на i-ом шаге как минимум одна дуга с p_i насыщается Длительность фазы не превосходит числа дуг. Число фаз не превосходит числа узлов Число шагов алгоритма = сумма длительностей всех фаз

Метод кратчайших путей (МКП)

Дополнительные выводы из доказательство Теоремы

Дуга с пути p_i, подвергнутая насыщению на соответствующем шаге алгоритма не попадает на последующие пути $p_j, j > i$ в пределах одной фазы В пределах одной фазы насыщаемые дуги не повторяются Вместе с тем на i-ом шаге как минимум одна дуга с p_i насыщается Длительность фазы не превосходит числа дуг. Число фаз не превосходит числа узлов Число шагов алгоритма = сумма длительностей всех фаз

Теорема: Число шагов алгоритма конечно

$$\boxed{\text{Число шагов алгоритма}} \leq \boxed{\text{Число узлов}} \times \boxed{\text{Число дуг}}$$